GUÍA DE TP - 2011-

SUSANA GRANADO PERALTA

MATEMATICA DISCRETA

U.D.B. MATEMATICA K1FP1

CENTRO de ESTUDIANTES de INGENIERIA TECNOLOGICA

UTN.BA

UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA NACIONAL
FACULTAD REGIONAL BUENOS AIRES

Universidad Tecnológica Nacional
Facultad Regional Buenos Aires
Ingeniería en Sistemas de Información

MATEMÁTICA DISCRETA

CÁTEDRA GRANADO PERALTA

AÑO 2011

INDICE

Universidad Tecnológica Nacional
Facultad Regional Buenos Aires
Departamento Ingeniería en Sistemas de Información

ASIGNATURA:	MATEMÁTICA DISCRETA	MODALIDAD:	Anual/cuatrimestral
DEPARTAMENTO	ING EN SIST DE INFORMACION	HORAS SEM.:	6 horas
AREA:	PROGRAMACIÓN	HORAS/AÑO:	96 horas
BLOQUE	TECNOLOGÍAS BÁSICAS	HORAS RELOJ	72
		NIVEL:	1º
		AÑO DE DICTADO: 2011	Plan 2008

Importancia de la asignatura en la formación del futuro Ingeniero

El rápido desarrollo de las actuales computadoras, con su inmensa capacidad de cálculo, con su enorme rapidez, versatilidad, potencia de representación gráfica, posibilidades para la modelización sin pasar por la formulación matemática de corte clásico,... ha abierto multitud de campos diversos, con origen no ya en la física, sino en otras muchas ciencias tales como la economía, las ciencias de la organización, biología,... cuyos problemas resultaban opacos, en parte por las enormes masas de información que había que tratar hasta llegar a dar con las intuiciones matemáticas valiosas que pudieran conducir a procesos de resolución de los difíciles problemas propuestos en estos campos.

Por otra parte, el acento en los algoritmos discretos, usados en las ciencias de la computación, en la informática, así como en la modelización de diversos fenómenos, ha dado lugar a un traslado de énfasis en la matemática actual hacia la matemática discreta. Ciertas porciones de ella son suficientemente elementales como para poder formar parte con éxito de un programa inicial de matemática.

Para un profesional en sistemas de información, que precise una formación que le permita desarrollar investigaciones en la Informática aplicada le es muy importante dominar los temas básicos y avanzados de la Matemática Discreta Hay temas fundamentales para un ingeniero en sistemas tales como lógica, álgebra de Boole, máquinas de estados finitos y grafos, métodos de demostración, sistemas de numeración y relaciones de recurrencia (i.e. ecuaciones en diferencias) que no pueden ignorar.

Por todo lo expuesto se hace imprescindible que los alumnos conozcan y manejen correctamente los conceptos básicos de la Matemática Discreta y que comprendan que son necesarios para conseguir soluciones rigurosas a problemas de muy diversas áreas que encontrarán en asignaturas posteriores del plan de Estudios. De igual forma se pretende que dichos alumnos desarrollen una capacidad de resolución de problemas en la que tenga importancia el análisis previo a su propia resolución.

Objetivos

- Aplicar métodos inductivos, deductivos y recursivos en la resolución de situaciones problemáticas y demostraciones matemáticas.
- Comprender los conceptos y procedimientos necesarios para resolver relaciones de recurrencia.
- Aplicar propiedades y funciones definidas en los números enteros y enteros no negativos.
- Caracterizar distintas estructuras algebraicas, enfatizando las que sean finitas y las álgebras de Boole.
- Aplicar propiedades de grafos, dígrafos y árboles en la resolución de situaciones problemáticas.

Carga Horaria:

6 horas cátedra de acuerdo a lo establecido en el plan de estudios.

Contenidos Mínimos (Programa Sintético).

- Lógica proposicional Clásica y de predicados de Primer Orden.
- Teoría de Números.
- Inducción Matemática.
- Relaciones de recurrencia.
- Estructuras Algebraicas Finitas y Álgebras de Boole.
- Grafos dígrafos y árboles

Contenidos Analíticos:

Unidad l: Cálculo proposicional y cálculo de predicados
Proposiciones. Conectivos. Equivalencias lógicas. Leyes de la lógica. Tautologías y contradicciones. Cuantificadores. Implicaciones y derivaciones lógicas. Componentes sintácticos del cálculo de predicados. Variables libres y ligadas. Lógica de primer orden: sintaxis, semántica, reglas de inferencias, sistemas deductivos.

> **Logros pedagógicos**: Conocer la formalidad del lenguaje matemático y la estructura de los razonamientos bien formados

Unidad II: Teoría de Conjuntos
Conjuntos y subconjuntos. Las operaciones y sus propiedades. Producto cartesiano y relaciones. Relaciones, matrices y dígrafos. Propiedades de las relaciones. Relaciones de equivalencia y particiones. Relaciones de orden, elementos notables y diagrama de Hasse.

Logros pedagógicos: Manejar herramientas importantes para resolver cuestiones afines a la asignatura con la computadora y conocer la fundamentación de las bases de datos relacionales.

Unidad III: Teoría de Números
Divisibilidad. Algoritmo de la división. Máximo común divisor y mínimo común múltiplo. Teorema fundamental de la aritmética. Congruencias. Ecuación lineal de congruencias. Teorema de Fermat.

Logros pedagógicos: Conocer las bases matemáticas de las herramientas utilizadas frecuentemente en teoría de la información

Unidad IV: Inducción y Recursividad
Conjuntos inductivos y Principio de inducción matemática. Definiciones recursivas. Relaciones de recurrencia lineales homogéneas con coeficientes constantes con raíces simples y reales, complejas y simples, reales múltiples. Relaciones de recurrencia lineales no homogéneas.

Logros pedagógicos: Reconocer y resolver ecuaciones recursivas aplicando metodologías específicas o un usando un proceso iterativo y que además sea capaz de validar su resultado usando inducción matemática.

Unidad V: Estructuras Algebraicas Finitas
Operaciones cerradas. Propiedades. Definición y ejemplos de grupos. Subgrupos. Grupos cíclicos. Isomorfismo de grupos. Co-clases y Subgrupo normal. Teorema de Lagrange. Grupo cociente.

Logros pedagógicos: Conocer la estructura de grupo y aplicarla para diseñar códigos de detección de errores en código en bloque (códigos de grupo)

Unidad VI: Álgebras de Boole
Retículo: definición y ejemplos. Principio de Dualidad. Isomorfismos. Álgebras de Boole Álgebras de Boole finitas. Maxitérminos y minitérminos. Formas canónicas. Redes de compuertas.

Logros pedagógicos: Conocer la estructura matemática del Álgebra de Boole para poder aplicarla a problemas concretos y diferenciarla del modelo matemático de grupo.

Unidad VII: Grafos, Dígrafos y Árboles

Grafo: definición formal y nociones elementales. Matrices de adyacencia y de incidencia. Subgrafos. Caminos y ciclos de Euler. Caminos y ciclos de Hamilton. Isomorfismo de grafos. Grafos dirigidos: definición formal y nociones elementales. Matrices de adyacencia y de incidencia. Caminos y ciclos de Euler. Caminos y ciclos de Hamilton. Caracterización de los árboles. Arboles dirigidos y no dirigidos. Árboles con raíz. Recorrido de árboles.

Logros pedagógicos: Usar grafos, dígrafos y árboles para modelar problemas concretos.

Unidad VIII: Lenguajes, Gramáticas y Autómatas

Operaciones con palabras. Operaciones con lenguajes. Clausuras de Kleene y Positiva de un lenguaje. Gramáticas: definición formal, obtención de palabras y clasificación. Lenguajes regulares y autómatas finitos.

Logros pedagógicos: Se pretende dar una introducción al tema Lenguajes, gramáticas y autómatas que profundizarán en la asignatura Sintaxis y Semántica del Lenguaje con el objeto de relacionar muchos de los temas desarrollados durante el cuatrimestre en un tema específico de la carrera.

Estrategias Metodológicas

Al considerar el aprendizaje como construcción no se puede aceptar una separación arbitraria entre teoría y práctica: la propuesta es acercarse a los problemas integrando la teoría con la práctica como forma de generación de conocimientos y vinculando al alumno de una forma más interesante y agradable con la disciplina, utilizando nuevas tecnologías y distintas estrategias didácticas según la unidad.
En las clases, que serán teórico- prácticas se inducirá al alumno a participar activamente ; se pondrá especial énfasis en formar al estudiante como un investigador en el tratamiento de cada uno de los temas abordados induciéndolos a formular, probar y modelizar.
Con referencia a las demostraciones de propiedades sólo se harán las que por su aporte a la formación se consideren pertinentes, otras, "propiedades menores", que generalmente aparecen en la guía de Trabajos Prácticos, las harán los alumnos con la ayuda del docente; en todos los casos se priorizará el conocimiento y manejo de las hipótesis al hecho de poder demostrar algo que tiene dos inconvenientes: por un lado está en todos los libros y por el otro la estudian de memoria.
Se le dará especial importancia al desarrollo de la capacidad creativa, que a lo largo de la carrera y en su profesión le permitirá ser sensible a los cambios del contexto cuya consecuencia es lograr soluciones específicas adaptadas a cada circunstancia.

Mediante el análisis de datos para el uso de propiedades se facilitará una actitud de comprobación sistemática de la validez de los supuestos sobre los cuales se basan afirmaciones.
Se relacionarán cada una de las unidades temáticas con otras asignaturas con el objetivo de favorecer una actitud interdisciplinaria en el tratamiento de los problemas.
Concretando, esta propuesta apunta a la combinación integrada de conocimientos, habilidades y actitudes conducentes a un desempeño adecuado y oportuno en diversos contextos.

Formas de Evaluación

La evaluación de los conocimientos adquiridos es continua y se formaliza de la siguiente forma:

a) Entrega y defensa de un Trabajo Práctico integrador con problemas (no ejercicios) a resolver en grupo y defensa individual que incluye todos los temas del programa.

b) Aprobación del 75% de parciales correspondientes a cada una de las unidades a desarrollar (evaluación de proceso)

c) La aprobación de un Parcial integrador que abarca todos los temas de la materia, que según la normativa puede ser recuperado dos veces

d) Si ha cumplimentado las instancias anteriores está en condiciones de rendir el examen final que está dirigido y prioriza (como durante toda la cursada)la formación de un cuerpo de conocimientos)

Algo para tener en cuenta es que todos los documentos escritos entregados por el alumno se les corrigen y entregan para que puedan consultar acerca de sus errores.

Trabajos Prácticos

Se armarán equipos integrados por un mínimo de cuatro alumnos y un máximo de seis los cuales propondrán y llevarán adelante una idea-proyecto de carácter técnico-administrativo relacionado con la carrera dentro del área de su interés. A partir de la idea, construirán en forma gradual cada pieza clave mediante la utilización de los procesos necesarios aprendidos en el transcurso de la asignatura.

Bibliografía.

Bibliografía obligatoria

1. Dorronsoro, J. .,Hernandez, E. ; 1996; Números, grupos y anillos,; Addison Wesley

2. Granado Peralta, S.; 2009; Matemática Discreta; Editorial CEIT
3. Isasi; Martinez & Borrajo; 1997; Lenguajes, Gramáticas y Autómatas :un enfoque práctico ;Addison Wesley
4. Johnsonbaugh, R; 2005; Matemáticas Discretas; Prentice Hall.
5. Ross, K.,Wright,R ; 1990; Matemáticas Discretas ; Prentice Hall

Bibliografía complementaria

1. Grassmann,W.; Tremblay,J ; 1998; Matemática Discreta y lógica, Prentice Hall
2. Kolman Busby, Ross; 1996;Discrete Mathematical Structures ; Prentice Hall
3. Liu, C. L; 1995; Elementos de Matemáticas Discretas;. Mc.Graw Hill
4. Scheinerman, E. ; 2001; Matemáticas Discretas, Math;
5. Tremblay, J.Manohar, R.; 1996; Matemáticas discretas con aplicaciones a las ciencias de la computación; CECSA

U.T.N.F.R.B.A.-DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA EN SISTEMAS DE INFORMACIÓN
MATEMÁTICA DISCRETA – CÁTEDRA GRANADO PERALTA
AÑO 2011
TRABAJO PRÁCTICO Nº 1

Cálculo proposicional y cálculo de predicados

1.1 Sabiendo que p = "Marcos es un bebé", q= "Marcos es feliz" escribir las siguientes afirmaciones en forma simbólica

a) Marcos no es un bebé o es feliz
b) Marcos es un bebé y es feliz
c) Marcos es bebé o es feliz
d) Si Marcos es bebé entonces es feliz
e) Marcos es feliz si y sólo es bebé.

1.2 Identificar las proposiciones simples y expresar simbólicamente

a) Mateo es alto y Marcos es pequeño y ágil.
b) Si *x* es un número menor que *y* y *y* es menor que *z* entonces *x* es menor que *z*.
c) Si no vi mal, Carlos conducía un auto colorado y deportivo y estaba acompañado por una mujer rubia.
d) La inflación cederá si y sólo si se reduce el gasto público.
e) Habrá un brindis sólo si no llueve.

1.3 Construir en cada caso la tabla de verdad, indicar si se trata de una tautología, contingencia o contradicción e identificar los enunciados equivalentes.

a) $(p \wedge (p \Rightarrow q)) \Rightarrow q$
b) $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg p \vee q)$
c) $((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$
d) $(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow ((p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q))$
e) $\neg (p \vee (q \wedge r)) \Leftrightarrow ((p \vee q) \wedge (p \vee r))$

1.4 Considerar las proposiciones p, q, r y contestar cada una de las siguientes cuestiones:

a) Usando la tautología $p \vee \neg p$, demostrar que $(p \Rightarrow q) \vee \neg(\neg q \wedge p)$ es una tautología

b) Sin hacer la tabla de verdad mostrar que las siguientes proposiciones son equivalentes: $[(p \vee q) \Rightarrow r]$ y $[(p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r)]$

c) Idem para $[(p \vee q) \Rightarrow r]$ y $[\neg r \Rightarrow \neg (p \vee q)]$

d) Si $(\neg p \vee q)$ es falso dar el valor de verdad de p

e) Dar los casos para los cuales la proposición $(q \Rightarrow [(\neg p \vee r) \wedge \neg s]) \wedge [\neg s \Rightarrow (\neg r \wedge q)]$ es verdadera

f) Dar un ejemplo de una proposición compuesta que sea verdadera si a lo sumo dos de las tres proposiciones simples son verdaderas

g) Demostrar que $p \Rightarrow (q \Rightarrow r)$ y $(p \wedge q) \Rightarrow r$ son equivalentes

1.5 Para cada una de las siguientes proposiciones se pide negarlas y simplificarlas

a) $(p \vee q) \Rightarrow q$
b) $(p \vee \neg q) \wedge [(\neg p \vee q) \vee (\neg(\neg p \vee \neg r)) \wedge q]$
c) $[\neg(p \vee q) \wedge r] \vee -q$
d) $p \vee \neg q \vee [(p \wedge q) \wedge (p \vee \neg q) \wedge (\neg p \wedge q)]$
e) $(p \vee (s \wedge q)) \vee (\neg q \wedge s)$
f) $[[[(p \wedge q) \wedge r] \vee [(p \wedge r) \wedge \neg r]] \vee \neg q] \Rightarrow s$

1.6 Considerar el siguiente enunciado: "Si estudio Matemática Discreta, entonces aprobaré el final". Se pide escribirla en lenguaje simbólico y dar los enunciados recíproco, inverso (contrario) y contrarrecíproco en forma coloquial y simbólicamente.

1.7 Para la proposición " si un polígono es un triángulo entonces la suma de sus ángulos interiores es 180°, se pide:

a) Escribirla simbólicamente
b) Dar su valor de verdad
c) Escribir la recíproca, la contrarrecíproca y la contraria
d) Dar el valor de verdad en cada caso

1.8 Probar que las siguientes proposiciones son tautologías

a) $((p \vee q) \wedge \neg p) \Rightarrow q$ (silogismo disyuntivo)
b) $(p \wedge (p \Rightarrow q)) \Rightarrow q$ (modus ponens)
c) $p \Rightarrow (p \vee q)$ (ley de adición)
d) $(p \wedge q) \Rightarrow p$ (ley de simplificación)
e) $((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$ (silogismo hipotético o implicación lógica)
f) $((p \Rightarrow q) \wedge \neg q) \Rightarrow \neg p$ (modus tollens)

1.9 Para cada uno de los siguientes casos indicar las reglas de inferencia que se usaron:

a) Si Pedro descubre que el auto está chocado, se pondrá furioso. Se que Pedro está al tanto de que el auto está chocado. Por lo tanto Pedro se pondrá furioso.

b) Sabemos que Mario compraría un Ford o un Corsa. Mario no compró el Corsa. Por lo tanto Mario compró el Ford.

c) Si yo lo hice, estoy arrepentida, si no lo hice también estoy arrepentida. Por lo tanto estoy arrepentida.

1.10 Dar la validez de los siguientes razonamientos

a) $[(p \Rightarrow r) \wedge (\neg p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow s)] \Rightarrow (\neg r \Rightarrow s)$
b) $[[(\neg p \vee \neg q) \Rightarrow (r \Rightarrow s)] \wedge (r \Rightarrow t) \wedge \neg t] \Rightarrow p$

c) $[p \wedge (p \vee q) \wedge [q \Rightarrow (r \Rightarrow s)] \wedge (t \Rightarrow r)] \Rightarrow (\neg s \vee \neg t)$

1.11 Considerar las siguientes proposiciones abiertas:

$p(x): x \leq 4; q(x): x+2$ es impar; $r(x): x \geq 0$, definidas sobre el conjunto Z, de los números enteros. Se pide dar, justificando, su valor de verdad:

a) $p(0)$; b) $q(-4)$; c) $\neg r(2)$; d) $[p(2) \wedge q(-3)] \Rightarrow r(2)$; e) $\exists x: [p(x) \wedge \neg q(x)]$; f) $\forall x: [r(x) \wedge q(x)]$

1.12 Considerar, sobre el conjunto de los números enteros, las siguientes proposiciones abiertas:

$p(x): x^2 - 7x + 10 = 0$

$q(x): x^2 - 2x - 3 = 0$

$r(x): x<0$

a) Determinar el valor de verdad de las siguientes proposiciones, justificar cada afirmación:

$\forall x[p(x) \Rightarrow \neg r(x)]; \forall x[q(x) \Rightarrow r(x)]; \exists x[q(x) \Rightarrow r(x)]; \exists x[p(x) \Rightarrow r(x)]$

b) Dar las respuestas anteriores sobre el conjunto de los números naturales

c) Dar las repuestas si el universo son los números 5, 2

1.13 Considerar el conjunto N de los números naturales, y las siguientes proposiciones abiertas: $p(x;y)$ ="y es múltiplo de x"

Determinar el valor de verdad en cada uno de los siguientes casos:

a) $\forall x \exists y: p(x;y)$; b) $\forall y \exists x: p(x;y)$ c) $\exists y \exists x: p(x;y)$ d) $\exists x \exists y: p(x;y)$

1.14 Para la siguiente proposición abierta: $p(x;y)$ $y - x = y + x^2$, definida para el conjunto Z de los números enteros, se pide:

a) $p(0;0)$, b) $p(1;1)$, c) $p(0;1)$, d) $p(0;3)$, e) $\forall y, p(0;y)$, f) $\exists y\ p(1;y)$,
g) $\forall x, \forall y\ p(x;y)$, h) $\forall x \exists y\ p(x;y)$, i) $\exists y \forall x\ p(x;y)$, j) $\forall y \exists x\ p(x;y)$

1.15 Con referencia al ejercicio 1.12., dar los valores de x para los que es verdadera proposición $[p(x) \wedge q(x)] \wedge r(x)$

1.16 Considerar el universo de los polígonos de tres y cuatro lados y las siguientes proposiciones abiertas:

a(x): todos los ángulos internos son iguales
e(x): x es un triángulo equilátero
h(x): todos los lados de x son iguales
i(x): x es un triángulo isósceles
p(x): x tiene un ángulo interior mayor que 180 º
q(x): x es un cuadrilátero
r(x): x es un rectángulo

s(x): x es un cuadrado
t(x): x es un triángulo

Dar el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

$\forall\ x\left[q(x)\vee t(x)\right];\forall\ x\left[i(x)\Rightarrow e(x)\right];\exists\ x\left[t(x)\wedge p(x)\right];\forall\ x\left[a(x)\Rightarrow e(x)\right];$

$\forall\ x\left[(a(x)\wedge t(x))\Leftrightarrow e(x)\right];\exists\ x\left[q(x)\wedge\neg r(x)\right];\exists\ x\left[r(x)\wedge\neg s(x)\right];\forall\ x\left[h(x)\wedge e(x)\right];$

$\forall\ x\left[(h(x)\wedge q(x))\rightarrow s(x)\right];\exists\ x\left[q(x)\wedge p(x)\right];\forall\ x\left[r(x)\Rightarrow\neg p(x)\right];$

$\forall\ x\left[a(x)\Rightarrow\neg(e(x)\Leftrightarrow r(x))\right]$

$\forall\ x\left[s(x)\Leftrightarrow(a(x)\wedge h(x))\right];\forall\ x\left[t(x)\Rightarrow(a(x)\Leftrightarrow h(x))\right]$

1.17 Identificar las variables libres y acotadas en las siguientes proposiciones definidas en su dominio

$\forall\ x\forall\ y\left[\sec^2 x-\sec^2 y=\text{tang}^2 x-\text{tang}^2 y\right];\forall\ x\exists\ z\left[\cos(x+y)=\text{sen}(z-x)\right]$

$\exists\ x\exists\ y\left[x^2-y^2=z\right];\exists\ x\left[xy=y\right]$

1.18

Negar y expresar en funcion de : $\neg$, $\wedge$, $\vee$

$\exists\ x\left[p(x)\vee q(x)\right];\exists\ x\left[(p(x)\vee q(x))\Rightarrow r(x)\right];\forall\ x\left[p(x)\Rightarrow q(x)\right];\forall\ x\left[p(x)\wedge\neg q(x)\right]$

1.19 Dar el valor de verdad de las siguientes proposiciones definidas en el conjunto de los números reales:

$\exists x\exists y\left[xy=1\right];\exists x\forall y\left[xy=1\right];\forall x\exists y\left[xy=1\right];$

$\forall x\forall y\left[\text{sen}^2 x+\cos^2 x=\text{sen}^2 y+\cos^2 y\right];\exists x\exists y\left[(2x+y=5)\wedge(x-3y=-8)\right]$

1.20 Para la proposición: $\forall\ x\exists\ y\left[x+y=17\right]$ determinar su valor de verdad en los conjuntos de los enteros; naturales; enteros para x, enteros positivos naturales) para y; enteros positivos para x, enteros para y

TRABAJO PRÁCTICO Nº 2

Teoría de Conjuntos

1. Los conjuntos y sus operaciones

1.1 Considerar los conjuntos $A = \{a, \{a\}, b\}$ y $B = \{a, \{b\}, b\}$ e indicar, justificando, el valor de verdad de los siguientes enunciados:

$a) a \notin A, b) a \in B, c) \{a\} \in A, d) \{a\} \notin B,$

$e) a \subseteq A, f) a \not\subset B, g) \{a\} \supseteq A, h) \{a\} \subseteq B,$

$i) \{b\} \subseteq A, j) \{b\} \in B, k) \{\{b\}\} \not\subset A, l) \{\{b\}\} \subseteq B,$

$m) \{\{a\}\} \not\subset A, n) \{\{a\}\} \notin B, o) \{a, \{a\}\} \subseteq A, p) \{a, \{a\}\} \in B$

1.2 ¿Cuáles de las siguientes proposiciones son verdaderas?

$a) \varnothing \in \varnothing$; $b) \varnothing \not\subset \varnothing$; $c) \varnothing \not\in \{\varnothing\}$;

$d) \varnothing \in \{\varnothing, a\}$; $e) \varnothing \subseteq \{\varnothing, a\}$; $f) \exists A / \varnothing \subseteq A$

1.3 Para cada uno de los siguientes enunciados determinar si son verdaderos o falsos; demuestre si es verdadera y presente un contraejemplo si es falso.

a) $A \cap B \subseteq A \subseteq A \cup B$
b) $B \subseteq A \Leftrightarrow A \cap B = A \Leftrightarrow A \cup B = B$
c) $A, B \subseteq C \Leftrightarrow A \cup B \subseteq C$
d) $C \subseteq A, B \Leftrightarrow C \subseteq A \cap B$
e) $(A - B) \cup (B - A) \cup (A \cap B) = A \cup B$
f) $A \subseteq (A - B) \Leftrightarrow A \cap B = \varnothing$
g) $\overline{(A \cap B)} = \overline{A} \cup \overline{B}$

1.4Si A y B son conjuntos cualesquiera. Desarrolle completamente cada una de las siguientes operaciones de conjuntos usando propiedades.

a) $(A \cup B) \cap (\overline{A} \cap \overline{B}) =$
b) $[(A \cap B) - A] \cup [B - (A \cap B)] =$
c) $(A - B) \cup (B - A) =$
d) $(A - B) \cap B =$
e) $(A \cap \overline{B}) \cup (A \cap B) \cup (B \cap \overline{A}) =$

1.5 Para cada uno de los casos siguientes determine el conjunto $A \cup B$, $A \cap B$, A-B, B-A y represente geométricamente en la recta real, los conjuntos A, B y cada uno de los obtenidos

a) $A = [-2;5]$, $B = (0;7)$
b) $A = (-\infty; 6]$, $B = [-2; 4)$
c) $A = (-5;3]$, $B = \{-5, 5, 0, 9\}$

d) $A = (-\infty; 6), B = (9; +\infty)$
e) $A = (-\infty; 6), B = [6; +\infty)$
f) $A = (-\infty; 6), B = [-6; +\infty)$

1.6 Sea A un conjunto, llamamos conjunto potencia o conjunto de partes de A y lo indicamos P(A) al siguiente conjunto:
$P(A) = \{X / X \subseteq A\}$

a)calcular y / o expresar el conjunto de Partes para cada uno de los siguientes casos:

$A = \{-1, 2, 3\}$, $A = \{(a; b), (c; d)\}$, $A = \varnothing$, $A = (-3; 2]$, $A = \{1, \{1, 2\}\}$

b) Probar que para dos conjuntos A y B se verifica que:

1. $P(A) \cap P(B) = P(A \cap B)$;
2. $P(A) \cup P(B) \subseteq P(A \cup B)$

1.7 Sea $\bigcup$ un conjunto universal y sea I un conjunto de índices, para

cada $i \in I$, sea $B_i \subseteq \bigcup$ Demostrar que si $A \subseteq \bigcup$ se verifica : $A \cap \left(\bigcup_{i \in I} B_i \right) = \bigcup_{i \in I} (A \cap B_i)$.

Enunciar y demostrar la expresión dual.

2. Producto Cartesiano

2.1 Probar o refutar el valor de verdad de cada una de las siguientes proposiciones sabiendo que $A, B, C \subseteq U$

a) $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$
b) $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$
c) $(A \times A) - (B \times B) = (A - B) \times (A - B)$
d) $(A \cup B) \times (A \cup B) \subseteq (A \times B) \cup (B \times A)$
e) $A \times (B - C) = (A \times B) - (A \times C)$

2.2 Mostrar que, para cualquier conjunto A, $\{a, b\} \times A = (\{a\} \times A) \cup (\{b\} \times A)$
2.3 Para un conjunto finito A de cardinal 2, se pide:

a) Explicitar: $|A^2|, |P(A)|$ y $|P(A^2)|$
b) Contestar las mismas cuestiones para el conjunto vacío
c) Contestar las mismas cuestiones para un conjunto finito A de cardinal n.

2.4 Sean A,B dos conjuntos , probar o refutar cada una de las siguientes afirmaciones:

a) $A \times B = \varnothing \Leftrightarrow A = \varnothing \vee B = \varnothing$
b) $A \times B = B \times A \Leftrightarrow A = B$
c) $P(A) \times P(B) = P(A \times B)$

2.5 Sea $n \in N, [1,n] = \{x \in N / x \le n\}$ y $(A_i)_{i \in N}$ una familia de conjuntos, se pide:

a) Si n= 2 y $|A_1| = m, |A_2| = r$ caracterizar a los elementos de $A_1 \times A_2$
b)Caracterizar los elementos que pertenecen a $A_1 \times A_2 \times A_3 \times \ldots\ldots\ldots \times A_n$; si $j \in N, \forall j, j = 1, n$

3.Relaciones

3.1 Para los conjuntos $A = \{x \in Z / -2 \le x \le 6\}$ y $B = \{x \in Z / -1 \le x \le 4\}$ y las relaciones $R \subseteq A \times B, S \subseteq A \times B$ definidas por: $aRb \Leftrightarrow 3|a - b$, $S = \{(x;y) / y = 2|x|\}$, se pide:

a) Un diagrama para la relación R
b) La relación S por extensión
c) Por comprensión $R \cap S$
d) Dominio e imagen de $R, S, R^{-1}, \overline{S}$

3.2 Sea A = {-2, 0, 2, 1} y las relaciones que se dan a continuación, definidas en A x A:

$R_1 = \{(x; y) / x=y\}$, $R_2 = \{(x; y) / y=2 - x\}$, $R_3 = \{(x; y)/ y = x^2-4\}$, $R_4 = \{(x;y) / x^2 + y^2=1\}$, $R_5 = \{(x;y) / x^2 + y^2 \geq 18\}$, $R_6 = \{(x;y) / x^2 + y^2 \leq 18\}$,

Se pide:

a) Cada una de las relaciones por extensión
b) Dominio e imagen en cada caso
c) La relación inversa y la complementaria para cada una
d) $R_1 - R_3$
e) $R_2 \cap R_4$
f) $R_3 \cup R_2$
g) $(R_1)^2$

3.3Sean A y B dos conjuntos y $R \subseteq A \times B, S \subseteq A \times B$, probar la validez de las siguientes afirmaciones:

a)$R \subseteq S \Rightarrow R^{-1} \subseteq S^{-1}$; b)$R \subseteq S \Leftrightarrow \overline{S} \subseteq \overline{R}$; c)$D_{R^{-1}} = I_R$; d)$I_{R^{-1}} = D_R$; e)$(R \cap S)^{-1} = R^{-1} \cap S^{-1}$;
f)$(R \cup S)^{-1} = R^{-1} \cup S^{-1}$; g)$\overline{(R \cap S)} = \overline{R} \cup \overline{S}$; h)$\overline{(R \cap S)} = \overline{R} \cup \overline{S}$

3.4 Completar con $\leq$, $\geq$, ó = según corresponda

a) | A x B | .... | B x A |
b) Si $R \subseteq A \times B$ entonces | R | ..... | R^{-1} |

c) Si $R \subseteq A \times B$ entonces $|R|$ ....$|\varnothing|$
d) Si $R \subseteq A \times B$ entonces $|A \times B|$ ....$|R|$
e) Si $R, S \subseteq A \times B$ entonces $|R \cap S|$ ...$|R|$
f) Si $R \subseteq A \times B$ entonces $|\overline{R}|$........$|(A \times B) - R|$

4. Manejo Matricial de Relaciones

4.1 Considerar los conjuntos: $A = \{x \in N / x \leq 3\}$ y $B = \{x \in Z / -1 \leq x \leq 3\}$ Se define la relación $R \subseteq A \times B$, $xRy \Leftrightarrow y = x + 1$. Se pide:

a) Dominio e imagen de R
b) Formato de la matriz de la relación R
c) Domino e imagen de la relación recíproca R^{-1}
d) La matriz de R^{-1} y la traspuesta de la matriz R
e) Dominio e imagen de la relación complementaria de R y el formato de su matriz

4.2 Considerar el conjunto $A = \{1,2,3,4,5\}$ y las relaciones R, S definidas en A, dadas por $aRb \Leftrightarrow b = a - 1$ y $S = \{(2;4),(3;5),(1;1),(5;3),(4;2),(4;3)\}$. Se pide:

a) Las matrices M_R y M_S de las relaciones R y S respectivamente
b) Formato de la matriz de la relación complementaria de R
c) Formato de la matriz de la relación total $(A \times A)$
d) Matriz de la relación vacía
e) Matriz M_{R-1}, de la relación inversa de R

4.3 En el conjunto F = { {a, b}, {c ,d }, {a, b, c}, {d, e}, {f, g}, {g, h, i}, {g}} se define R se define de la forma que se da a continuación: $x \; R \; y \Leftrightarrow X \subseteq Y$

Se pide:
a) La relación R por enumeración
b) La matriz de la relación
c) La matriz de la relación recíproca

4.4 En el conjunto F = { {a, b}, {c ,d }, {a, b, c}, {d, e}, {f, g}, {g, h, i}, {g}} la relación S se define por su matriz

	{a,b}	{c,d}	{a,b,c}	{d,e}	{f,g}	{g,h,i}	{g}
{a,b}	0	1	0	1	1	1	1
{c,d}	1	0	0	0	1	1	1
{a,b,c}	0	0	0	1	1	1	1
{d,e}	1	0	1	0	1	1	1
{f,g}	1	1	1	1	0	0	0
{g,h,i}	1	1	1	1	0	0	0
{g}	1	1	1	1	0	0	0

Se pide:

a) La relación S por enumeración
b) Las matrices de la relaciones recíproca y complementaria

5 Relaciones y Dígrafos

5.1 En el conjunto $A = \{a, b, c, d\}$ se definen las relaciones

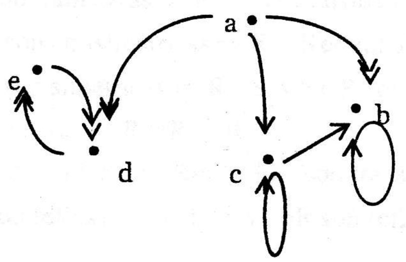
$R = \{(a;a),(a;b),(a;d),(b;b),(b;d),(b;c),(c;a),(d;c)\}$

$S = \{(a;a),(b;b),(c;c),(c;a),(c;d),(b;d),(a;c)\}$

Se pide:

a) El dígrafo para cada relación
b) Los dígrafos para las relaciones $R \cap S, R \cup S$
c) Los dígrafos para las relaciones $R - S, \overline{S} - R^{-1}$

5.2 Dado el conjunto A = {a, b, c, d, e} y la relación R: A → A cuyo dígrafo es:



Se pide:

a) R por extensión y su matriz M_R
b) R^{-1} y su dígrafo
c) $\overline{R}$ y su matriz
d) $(\overline{R})^{-1}$, $M_{(\overline{R})^{-1}}$ y el dígrafo

5.3 Para los conjuntos $A = \{1,2,3,4\}, B = \{1,4,9,7,11\}, C = \{1,5,10,12,15\}$ y las relaciones $R \subseteq A \times B, S \subseteq B \times C$ definidas por : $aRb \Leftrightarrow b = a^2, bSc \Leftrightarrow d = c + 1$

Se pide:

a) Dar cada relación por enumeración
b) Dar SoR y M_{SoR}
c)Mostrar que $(SoR)^{-1} = R^{-1} o\, S^{-1}$
d)Si $T \subseteq C \times D$, siendo D = {1, 0, 10}, T ={(5; 5), (10; 1)} mostrar $(ToS)oR = To(SoR)$
e) Mostrar que $(S \cup T)oR = (SoR) \cup (ToR)$
f) Calcular R^n, R^∞, ídem para la relación S

5.4 Sea $M_R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ la matriz de la relación R definida en $A = \{a, b, c\}$. Describir las matrices de R^n, R^{∞} y de R^*

6 Propiedades de las Relaciones

6.1 Estudiar las propiedades de la relación R, dada por su matriz M_R, definida en el conjunto indicado en cada caso

a) $A = \{1,2,3,4,5\}, M_R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

b) $A = \{1,2,3,4,5\}, M_R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

6.2 Sobre el conjunto $A = \{a, b, c, d\}$ dar un ejemplo de:

a) Una relación reflexiva y simétrica pero no transitiva
b) Una relación reflexiva y transitiva pero no simétrica
c) Una relación simétrica y transitiva pero no reflexiva
d) Una relación simétrica y antisimétrica

6.3 Dar condiciones para las que una relación no es reflexiva, no es simétrica, no es transitiva, no es antisimétrica.

6.4 Estudiar las propiedades de cada una de las siguientes relaciones definidas en el conjunto indicado en cada caso:

a) $R \subseteq N^2, aRb \Leftrightarrow a|b$

b) $R \subseteq Z^2, aRb \Leftrightarrow a|b$

c) $R \subseteq N^2, aRb \Leftrightarrow \exists k \in N / a^2 = k.b$, dar los elementos de los conjuntos $\{n / 4Rn\}$ y $\{m / mR4\}$

d) $R \subseteq P(A) \times P(A), X, Y, Z \in A, Z$ es fijo, $XRY \Leftrightarrow X \cap Z = Y \cap Z$

e) Para los conjunto A = {0, 1, 2, 3, 4} y Z ={2, 3,4} aplicar el resultado anterior

f) $R \subseteq R^2, xRy \Leftrightarrow |3 - y| = |y - 3|$

g) Sobre $N \times N, (x;y) R (z;t) \Leftrightarrow x \leq z \wedge y | t$

h) Sobre $Z \times Z, (x;y) S (z;t) \Leftrightarrow (-1)^x = (-1)^{-z} \wedge 2 | t - y$

6.5 Sean R y S relaciones definidas sobre A, probar o refutar cada una de las siguientes afirmaciones:

a) R es reflexiva $\Rightarrow R \cap R^{-1} \neq \varnothing$
b) R es reflexiva $\Leftrightarrow \Delta_A \subseteq R$
c) Si R es reflexiva y $|A| = n \Rightarrow |R| \geq n$
d) Si R y S son simétricas $\Rightarrow R \cup S$ es simétrica
e) Sea R una relación definida sobre un conjunto no vacío A, tal que Dom(R)= A, si R es simétrica y transitiva entonces R es reflexiva
f) Si R,S son transitivas $\Rightarrow R \cup S$ es transitiva
g) Si R y S son antisimétricas $\Rightarrow R \cap S$ es antisimétrica
h) Si R y S son simétricas $\Rightarrow R \circ S$ y $S \circ R$ son simétricas
i) R es transitiva $\Leftrightarrow R \circ R \subseteq R$
j) R, S son transitivas $\Rightarrow$ RoS y SoR son transitivas
k) Si R,S son reflexivas $\Leftrightarrow$ RoS y SoR son reflexivas

6.6 Sea R una relación definida sobre un conjunto A, que es simétrica y transitiva pero no es reflexiva. Para la relación complementaria $\overline{R}$, dar el valor de verdad de las siguientes proposiciones, justificar adecuadamente.

a) $\overline{R}$ es reflexiva
b) $\overline{R}$ es simétrica
c) $\overline{R}$ no es antisimétrica
d) $\overline{R}$ es transitiva

7. Relaciones de equivalencia

7.1 Analizar cuales de las siguientes relaciones son de equivalencia y en caso afirmativo describir las clases de equivalencia correspondientes.

a) Sobre Z: mRn si y solamente si m y n son coprimos.
b) Sobre Z: a Rb si y solamente a < b.
c) Sobre R 2 definimos: (x; y) S (x_o; y_o) si y solamente $y = y_o$.
d) Sobre Z: mR n si y solamente m - n es par.

7.2 Sea $f : A \to B$ una función, la relación $aRb \Leftrightarrow f(a) = f(b)$ se llama relación asociada a f.
Se pide :

a) probar que es una relación de equivalencia

b) dar las clases de equivalencia para la siguiente función real $F : R \to R$

$$F(x) = \begin{cases} x - 1, si \le x - 1 \\ 3, si\ 1 < x \le 2 \\ x^2, si\ x > 2 \end{cases}$$

7.3 Considerar el conjunto R de los números reales y la función f(x) = senx, aplicar el resultado anterior, dar las clases de equivalencia y el conjunto cociente.

7.4 Para las relaciones d), e), f) h) del ejercicio 6.4 dar las clases de equivalencia y el conjunto cociente.

7.5 Probar si las siguientes relaciones son de equivalencia en el conjunto A donde están definidas.

a) $A = Z, n \in N, aRb \Leftrightarrow n|a - b$

b) $A = R, aSb \Leftrightarrow a = b \vee ab = 7$

c) $A = R, aSb \Leftrightarrow a = b \vee a^2b^2 = 7$

d) $A = R, aSb \Leftrightarrow b - a \in Z$

e) $A = R^2, (x;y)S(z;t) \Leftrightarrow x = z \wedge |y - 6| = |6 - t|$

f) $A = N^2, (x;y)R(z;t) \Leftrightarrow x - z = 2k, k \in Z \wedge (t - 2y) \in N$

g) $A = R^2, (x;y)S(z;t) \Leftrightarrow 5x^2 - x - 5z^2 + z = y - t$

7.6 Para el conjunto $A = \{1,2,3,4,5,6\}$, indicar, justificando, cuáles de las siguientes son particiones. Cuando corresponda dar la relación de equivalencia que la determina.

a) $\{\{1,2\},\{5,6\},\{3\}\}$

b) $\{\{1,2,3,4,5,6\}\}$

c) $\{\{1,4\},\{2,3,1\},\{5,6\}\}$

d) $\{\{5\},\{1\},\{4\},\{2\},\{6\},\{3\}\}$

e) $\{\{2,3,4\},\varnothing,\{1,5,6\}\}$

f) $\{\{4\},A - \{4\}\}$

7.7 Sea A un conjunto y sean $\{ A_1, \ldots\ldots\ldots\ldots, A_n \}$ y $\{ B_1, \ldots\ldots\ldots\ldots, B_m \}$ dos particiones de A. Probar $\{\{ A_i \cap B_j$ con $i = 1, n \wedge j = 1, m \} - \varnothing\}$ es una partición de A

7.8 Indicar cuáles de las siguientes son particiones del conjunto N, de los números naturales

a) $\{\{n : n > 5\},\{ n : n < 5 \}\}$

b) $\{\{n : n > 5\}, \{ 1 \}, \{ 2, 3, 4, 5 \}\}$

c) $\{\{n : n^2 > 11\}, \{n : n^2 < 11\}\}$
d) $\{\{n : n > 0\}, \{n : n < 0\}\}$

7.9 Responder las mismas cuestiones con referencia al conjunto R, de los números reales

7.10 Sean A y B dos conjuntos no vacíos en los que están definidas, respectivamente, las relaciones de equivalencia R y S. Probar que en el conjunto producto cartesiano A x B, la relación T definida como sigue: $(a; b)\ T\ (c; d) \Leftrightarrow a\ R\ c \wedge b\ S\ d$ es una relación de equivalencia, hallar las clases de equivalencia y el conjunto cociente.

7.11 Sea A un conjunto en el que están definidas las relaciones de equivalencia R y S. Probar que $R \cap S$ es una relación de equivalencia. Determinar las clases de equivalencia y el conjunto cociente.

7.12 Considerar el conjunto Z, de los números enteros y las siguientes relaciones R, S definidas sobre Z de la forma que se da a continuación:

$R = \{(a;b) \square Z \times Z \,/\, a^2 - b^2 = 7k, k \square Z\}$, $xSy \ \square\ 2 | x - y$. Se sabe que S es de equivalencia.
Se pide dar las propiedades de R, hallar
$R \square S$, si es de equivalencia, dar las clases de equivalencia y el conjunto cociente, si no lo indicar cual es la propiedad que no se verifica .Justificar adecuadamente cada afirmación.

7.13 Si A es un conjunto tal que $|A| = 90$ y A_1, A_2, A_3, son clases de equivalencia donde $|A_1| = |A_2| = |A_3|$. Se pide indicar el cardinal de la relación de equivalencia que determina tal partición.

8. Conjuntos Ordenados

8.1 Probar que las siguientes relaciones son de orden. Indicar si es un orden total y /o un buen orden. Si corresponde hacer el diagrama de Hasse.

a) Sea $A = \{a, b\}$, en P(A) se define $xRy \Leftrightarrow x \subseteq y$

b) $S \subseteq R^2$, $xSy \Leftrightarrow x \geq y$, R es el conjunto de los números reales

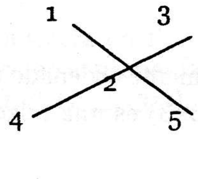
c) Sobre $R \times R$, $(x;y)S(z;t) \Leftrightarrow x \geq z \wedge y \leq t$, R es el conjunto de los números reales

d) Sobre $N \times N$, $(x;y)S(z;t) \Leftrightarrow x|z \wedge y \geq t$, N es el conjunto de los números naturales

e) En $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$, $xRy \Leftrightarrow$ y el múltiplo de x

f) En $A = \{x = 2^n, n \in N, 2 \leq n \leq 6\}$, $xRy \Leftrightarrow x|y$

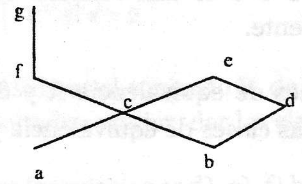
8.2Considerar el conjunto $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ con el orden dado por el diagrama de Hasse



U.T.N.F.R.B.A.-DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA EN SISTEMAS DE INFORMACIÓN
MATEMÁTICA DISCRETA – CÁTEDRA GRANADO PERALTA
AÑO 2011
TRABAJO PRÁCTICO Nº 2
Teoría de Conjuntos

De los siguientes subconjuntos {1, 2, 4},{3, 4},{1, 2, 3},{5, 2, 3},{5, 4}.de A , indicar cuales son cadenas y cuales no.

8.3Sea el conjunto A={a, b, c, d, e, f, g}con el orden dado por el diagrama de Hasse, dar todas las cadenas que contengan , al menos, tres elementos.



8.4Sobre N² se define la relación $(x;y)S(z;t) \Leftrightarrow (2x+1).2^t \leq (2z+1).2^y$. Probar que es una relación de orden total y ordenar, según S, los elementos del conjunto $A=\{1,2,3\}^2$

8.5Sean $(A;\ll)$ y $(B;\rhd)$ dos conjuntos ordenados. Se pide:

a) En $A\times B$ definir la relación R, $(x;y)R(z;t) \Leftrightarrow x \ll z \wedge y \rhd t$ y probar que es de orden (orden del producto)
b) Indicar, justificando, si $A\times B$ queda totalmente ordenado si A y B lo están

8.6 Considerar el conjunto N de los números naturales y las relaciones:
$$R_1 \subseteq N\times N, aR_1b \Leftrightarrow a|b \;\; y\; R_2 \subseteq N\times N, aR_2b \Leftrightarrow a \geq b.$$

a) Definir el orden del producto e indicar si el conjunto queda totalmente ordenado por esa relación
b) Considerar $\{3,6,11\}$, restringir el orden del producto y hacer el diagrama de Hasse
c) $D_{35}=\{x\in N, x|35\}$ ordenado por la divisibilidad y $P(A)$ con $A=\{a,b\}$ ordenado por la inclusión. Se pide el diagrama de Hasse para $D_{35}\times P(A)$.

8.7 Sean $(A;\prec_A)$ y $(B;\prec_B)$ dos conjuntos ordenados. En el producto cartesiano $A\times B$ se define $(x;y)\prec(z;t) \Leftrightarrow (x\neq z \wedge x \prec_A z) \vee (x=z \wedge y \prec_B t)$.Se pide demostrar que la realción es de orden e indicar si el conjunto queda totalmente ordenado.

8.8Probar o refutar con un contraejemplo:

a) Un conjunto A está bien ordenado por R si y solamente si está totalmente ordenado por R
b) Si R es una relación de orden en A y $\varnothing \neq B \subseteq A$ entonces $R \cap (B\times B)$ es una relación de orden

c) Si R es un orden en A entonces R^{-1} es un orden en A
d) Si un conjunto A está parcialmente ordenado por R entonces ningún subconjunto no vacío de A está totalmente ordenado por R
e) Si R es una relación de orden y S una relación de equivalencia definida en el mismo conjunto A entonces $R \cap S$ es una relación de orden

8.9 Para el conjunto ordenado del ejercicio 8.3, se pide

a) Hallar maximales y minimales
b) Para $B = \{c, d, f\}$, $C = \{a, b\}$, $D = \{f, b\}$ y $E = \{c, d\}$ dar cotas superiores e inferiores
c) Repetir las cuestiones anteriores pero con el orden recíproco
d) Indicar en cada uno de los casos anteriores si hay máximo y / o mínimo

8.10 Para $A = \{(0;0),(1;0)(2;0)(3;0),(0;1),(1;1),(2;1),(3;1),(0;2),(3;2),(1;2),(2;2)\}$ ordenado por $(x;y)S(z;t) \Leftrightarrow x \leq z \wedge y \leq t$. Se pide:

a) El diagrama de Hasse
b) Las cotas superiores, inferiores, supremo, máximo, ínfimo y mínimo para $B = \{(1; 1), (1; 2), (2; 1)\}$

8.11 Considerar el conjunto $A \subseteq (\mathbb{R}; \leq), A = \{x \in \mathbb{R} / x^2 \geq 49\}$ e indicar si está acotado, si corresponde dar máximo y / ó mínimo.

8.12 Hallar, si es posible, el conjunto de maximales, minimales, máximo y mínimo para cada una de los siguientes casos. Justificar

a) $(P(A); \subseteq)$
b) $(N; |)$
c) $(N - \{1\}; |)$

8.13 Hallar el conjunto de maximales, minimales, cotas superiores, cotas inferiores, indicar si hay máximo y / o mínimo para B en cada uno de los siguientes casos:

a) En el conjunto N, de los números naturales, ordenado por la relación "divide a", considerar $B = D_n = \{x \in N, x | n\}$
b) En el conjunto N, de los números naturales, ordenado por la relación "divide a", considerar B ={2, 3, 4, 5,.....,198, 199, 200}
c) En el conjunto A ={1,2,3,9,4,8,16,25,32,64,27,81} ordenado por: a R b $\Leftrightarrow$ "b es múltiplo de a", considerar B ={2,3,4,16}.

8.14 Se considera en $D_{48} \times N$ el orden del producto correspondiente a tomar el orden divisibilidad en el primer factor y el orden usual en el segundo factor.
Sea S ={(2;2), (2;3), (3;2), (6;3), (6;1), (4; 2)}. Se pide hallar:

a) Si existen, las cotas superiores e inferiores,
b) Elementos maximales y minimales,
c) Máximo, mínimo, supremo e ínfimo de S.

8.15Probar o refutar con un contraejemplo

a) Todo conjunto ordenado tiene al menos un elemento minimal.

b) Si A es un conjunto ordenado y $\varnothing \neq B \subseteq A$, entonces ninguna cota (superior y / o inferior) pertenecen a B

c) Si A es un conjunto ordenado y $\varnothing \neq B \subseteq A$ y c es cota superior de B en (A; R) entonces c es cota inferior de B en (A; R^{-1})

d) Si A está totalmente ordenado y M es el conjunto de maximales (minimales) entonces $|M| = 1$.

8.16 Sea A un conjunto, sea $|A| = n$ y sea M_R la matriz de la relación R, de orden, definida sobre A, se pide:

a) Indicar la forma de reconocer un elemento maximal(minimal) usando la matriz
b) Indicar la forma de reconocer el elemento máximo o mínimo usando la matriz

U.T.N.F.R.B.A.-DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA EN SISTEMAS DE INFORMACIÓN
MATEMÁTICA DISCRETA – CÁTEDRA GRANADO PERALTA
AÑO 2011
TRABAJO PRÁCTICO Nº 3

Teoría de Números

1.1 Indicar cuales de las siguientes proposiciones son verdaderas, justificar.

a) Todo número entero que es divisible por 4 lo es por16
b) Todo número entero que es divisible por 9 lo es por 3
c) Todo número entero que es divisible por 6 lo es por 2 o por 3
d) Si un número entero no es divisible por 6 no es divisible por 3 ni por 2
e) Todo número entero que no es divisible por 6 no lo es por 2 o por 3
f) Hay números naturales menores que 100 que son divisibles por 5 y por 3

1.2 Considerar el conjunto Z, de los números enteros y para las proposiciones que se dan a continuación, se pide demostrar las verdaderas y dar un contraejemplo si son falsas.

a) Si $a \neq 0 \Rightarrow a \mid a$
b) Si $a \neq 0 \wedge n \in N \Rightarrow a \mid a^n$
c) Si $a \neq 0 \Rightarrow a \mid |a| \wedge |a| \mid a$
d) Si $a \neq 0 \wedge a \mid b + c \Rightarrow a \mid b \vee a \mid c$
e) Si $a \neq 0,\ c \neq 0,\ a \mid b \Rightarrow a.c \mid b.c$
f) Si $a \neq 0,\ a \mid b \Leftrightarrow |a| \mid |b|$
g) Si $a \neq 0 \wedge a \mid 1 \Rightarrow |a| = 1$
h) Si $a \neq 0,\ b \neq 0,\ a \mid b \wedge b \mid a \Rightarrow |a| = |b|$, ¿que pasaría si a, b fueran números naturales?
i) Si $a \neq 0,\ c \neq 0,\ (a \mid b \wedge c \mid d) \Rightarrow a.c \mid b.d$
j) Si $a \neq 0,\ b \neq 0,\ c \neq 0,\ (a \mid b \wedge b \mid c) \Rightarrow a \mid c$
k) Si $a \neq 0,\ a \mid b + c \wedge a \mid b \Rightarrow a \mid c$

1.3 Demostrar que si $a \mid b \wedge a \mid c \Rightarrow a \mid (bx + cy)$ donde x, y son números enteros

1.4 ¿Cuales de los siguientes números son primos. 75, 57, 87, 124, 37, 945?

1.5 Indicar si alguno de los siguientes pares x y de números enteros son primos

a) $x = 12a + 9,\ y = 10a + 6$ $\quad a \in Z$
b) $x = 5a + 7b,\ y = 20a + 2b$ $\quad a, b \in Z$

1.6 Para los siguientes pares de números dar cociente y resto en la división de b por a

a) b= 4231, a = 7
b) b=-4231, a = 7

1.7 Se sabe que el resto de la división de un número entero por 4 es 3 y si se lo divide por 9 es 5, se pide dar el resto de la división de ese mismo número por 36.

TRABAJO PRÁCTICO Nº 3

Teoría de Números

1.8 Demostrar las siguientes propiedades:

a) $a \in Z, b \in Z \Rightarrow (a,b) = (|a|,|b|) = (b,a)$

b) $a \in Z, b \in Z, c \in Z \Rightarrow (a,(b,c)) = ((a,b),c)$

c) $a \neq 0, (a,b) = |a| \Leftrightarrow a|b$

d) $(a,b) = d \wedge (c,b) = 1 \Rightarrow (a.c,b) = d$

e) $(a,b) = 1, a|c \wedge b|c \Rightarrow a.b|c$

1.9 Para cada uno de los siguientes casos, se pide dar el máximo común divisor y escribirlo como combinación lineal entera.

a) a= 190, b = 68
b) b= 210, b = 25
c) c= 450, b = 1105

1.10 Completar y demostrar o demostrar, según corresponda

a) $\text{Si } a \in Z \Rightarrow [a,a] =$ ....

b) $\text{Si } a,b \in Z, [a,b] = b \Leftrightarrow$ ....

c) $\text{Si } a,b \in Z, [a,b] = (a,b) \Leftrightarrow$ ....

d) $\text{Si } a,b \in Z, [a,b] = |a.b| \Leftrightarrow$ ....

e) $\text{Si } a,b \in Z, [a,b] = [b,a] \Leftrightarrow$ ....

f) $a \in Z, b \in Z, c \in Z \Rightarrow [a,[b,c]] =$ ....

1.11 Indicar cuáles de los siguientes números son congruentes módulo n

a) $1 \equiv -1(2)$
b) $33 \equiv 0(11)$
c) $13 \equiv 33(10)$
d) $8 \equiv 57(7)$
e) $5 \equiv 4(3)$

1.12 Dar el valor de verdad de las siguientes proposiciones

a) $11 \equiv -1(6)$
b) $13 \equiv 0(2)$
c) $100 \equiv 10(3)$
d) $31 \equiv -18(7)$
e) $89 \equiv -1(9)$

Teoría de Números

1.13 Dar los valores de n que hacen verdadera cada una de las proposiciones que se dan a continuación

a) $5 \equiv 4(n)$
b) $5 \equiv -4\ (n)$
c) $1 \equiv 0(n)$
d) $9 \equiv -9(n)$
e) $122 \equiv 49(7)$

1.14 Probar las siguientes propiedades

a) $a \equiv a(n)$
b) $a \equiv b\ (n) \Rightarrow b \equiv a(n)$
c) $a \equiv b\ (n) \wedge b \equiv c(n) \Rightarrow a \equiv c(n)$
d) $a \equiv 0(n) \Leftrightarrow n/a$
e) $a \equiv b(n) \wedge c \equiv d\ (n) \Rightarrow a + c \equiv b + d(n)$
f) $a \equiv b(n) \wedge c \equiv d\ (n) \Rightarrow a\ .\ c \equiv b\ .d(n)$
g) $(m, n) = 1\ ,\ a \equiv b\ (m),\ a \equiv b\ (n) \Rightarrow a \equiv b(n.\ m)$
h) $a\ c \equiv b\ c\ (c.\ n) \Rightarrow a \equiv b\ (n)$
i) $ac \equiv b\ c\ (n) \wedge (c, n) = 1\ ) \Rightarrow a \equiv b(n)$

1.15 Para n=2, 1, 5, se pide:

a) Dar la partición que determina la relación de equivalencia $a \equiv b(n)$ definida en el conjunto Z, de los números enteros

b) Generalizar la expresión del conjunto cociente para cualquier n natural

1.16 Usando $a^p \equiv a(p)$[1], se pide calcular el resto de dividir a^b por t: $r(a^b, t)$ en cada uno de los siguientes casos

a) $r(5^{417}, 3)$
b) $r(47^{7385}, 17)$
c) $r(3^{1037}, 61)$
d) $r(3^{1037}, 61)$
e) $r(47^{12}, 11)$

1.17 Sabiendo que para un número natural, n, denominamos función phi de n, al cardinal del conjunto de los números naturales menores o iguales a n y coprimos con n, que indicamos:

$$\varphi(n) = \left|\{x \in \mathbb{N} / x \leq n \wedge (x,n) = 1\}\right|$$

Por ejemplo si n = 18, $\varphi(18) = |\ \{x \in \mathbb{N}\ /\ x \leq 18 \wedge (x,18)=1\}| = |\{1, 5, 7, 11, 13, 17\}| = 6$

[1] a, p son enteros, p es primo, si $(a, p) = 1 \Rightarrow a^{p-1} \equiv a(p)$ PEQUEÑO TEOREMA DE FERMAT

TRABAJO PRÁCTICO Nº 3

Teoría de Números

Se pide calcular:

a) $\varphi(1)=1$
b) $\varphi(2) = 1$
c) $\varphi(3)=\{ x\in N \,/\, x\leq 3 \wedge (x,3)=1\}=\{1, 2\}=2$
d) $\varphi(4)=\{ x\in N \,/\, x\leq 4 \wedge (x,4)=1\}=\{1, 3\}=2$
e) $\varphi(15)=\{ x\in N \,/\, x\leq 15 \wedge (x,15)=1\}=\{1, 2, 4, 7, 8, 11, 13, 14\}=8$
f) $\varphi(12)=\{ x\in N \,/\, x\leq 12 \wedge (x,12)=1\}=\{1, 5, 7, 11\}=4$

1.18 Resolver si es posible cada una de las siguientes ecuaciones, indicando, si corresponde, todas sus soluciones

a) $5x\equiv 14(18)$
b) $2x\equiv 7(7)$
c) $10x\equiv 9(3)$
d) $3x\equiv 7(11)$
e) $518x\equiv 72(13)$
f) $27x\equiv 6(3)$
g) $102x \equiv 14(12)$
h) $35x\equiv 14(182)$
i) $18x\equiv 0(15)$
j) $7x\equiv 1(11)$
k) $19x \equiv 1(140)$

TRABAJO PRÁCTICO Nº 4

Inducción y Recursividad

1. Inducción

1.1 Indicar, justificando, cuáles de los siguientes conjuntos son inductivos

a) $A=[-2;+\infty)$
b) $\{-1,0\}\cup(1,+\infty)$
c) $\{x\in Z /\ -6\le x<1\}\cup\{x\in Z / x>1\}$
d) $\{1,2,3,5,6,7\}\cup(7;+\infty)$
e) Q

1.2 Para cada uno de los siguientes casos indicar si hay alguna hipótesis del principio de inducción matemática que no se verifica.

$$a)p(n): n\le 2; b)p(n): \sqrt{n}\in N; c)\ p(n)=2n+1\le n^2; d)p(n): 3n^2\ge 10;$$

$$f)p(n): 2^n\ge n+1$$

1.3 Probar, usando inducción matemática, si los siguientes enunciados son válidos:

a) $\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{5}{6}\right)^i = 5-\frac{5^{n+1}}{6^n}$

b) $\sum_{i=1}^{n} i(2^{i-1}) = 1-(n-1)2^n$

c) $1+2^3+3^3+4^3+\ldots+n^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$

d) $\sum_{i=1}^{2n} i=\frac{3n(n+1)}{2}$

e) $\sum_{i=1}^{n} 3^{i-1}=\frac{3^n-1}{2}$

f) $\sum_{i=1}^{n} 3.(2i-1)^2 = n.(4n^2-1)$

g) $\frac{1}{2^2-1}+\frac{1}{3^2-1}+\ldots+\frac{1}{(n+1)^2-1}=\frac{3}{4}-\frac{1}{2(n+1)}-\frac{1}{2(n+2)}$

h) $\sum_{i=1}^{2n} 2i = 2n(2n+1)$

i) $\forall n\in N,\ n\le n^2$

j) Si $k\in R, k\ge 0, n\in N$, entonces $(1+k)^n\ge 1+n.k$

k) Si $\alpha > 1, n \in N, n \geq 2$ entonces $\alpha^n - 1 > n.(\alpha - 1)$

l) Sea n un número natural o cero, probar que si A es un conjunto con n elementos entonces P(A) tiene cardinal 2^n

m) Si $A_1, A_2, \ldots\ldots, A_n$, B son conjuntos. Entonces $\overline{\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) \cup B} = \bigcup_{i=1}^{n} \left(\overline{A_i} \cup B\right)$

n) Sea $n \in N, [1,n] = \left\{x \in N / x \leq n\right\}$ y $\left(A_i\right)_{i \in N}$ una familia de conjuntos, se pide:

1. Si n= 2 y $|A_1| = m, |A_2| = r$ probar que $|A_1 \times A_2| = |A_1|.|A_2|$
2. Demostrar que: $|A_1 \times A_2 \times A_3 \times \ldots\ldots \times A_n| = |A_1|.|A_2|.|A_3| \ldots\ldots |A_n|$

1.4 Usando inducción matemática probar la validez de las siguientes proposiciones $\forall n \in N, 6.7^n - 2.3^n$

a) $\forall n \in N$, $n^3 - n$ es divisible por 3
b) $\forall n \in N, n^2 + 3n + 1$ es impar
c) $\forall n \in N$, $2n + (-1)^{n+1}$ es divisible por 3
d) $\forall n \in N \cup \{0\}, 3^n - 7^n - 2$ es divisible por 8
e) $\forall n \in N, 6.7^n - 2.3^n$ es divisible por 4
f) $\forall n \in N, 10^n + 3.4^{n+1} + 5$ es divisible por 9
g) $\forall n \in N, x^{2n} - y^{2n}$ es divisible por $x \pm y$

2. <u>Sucesiones</u>

2.1 Hallar una expresión general para cada uno de los siguientes casos:

a) 1,-1, 1,-1, 1,-1, ...
b) 1, 3, 6, 10, 15,...
c) 1, 4, 16, 64, 256,...
d) 5,8, 11, 14, 17,...
e) 5, 15, 45, 135, ...

2.2 Hallar para cada caso la expresión general en forma no recursiva

a) $a_1 = 1;\ a_n = a_{n-1} + 2$, si $n > 1$
b) $a_1 = 2;\ a_n = a_{n-1} + 2n - 1$, si $n > 1$
c) $a_1 = 0;\ a_n = a_{n-1} + (n - 1)$, si $n \geq 2$
d) $a_0 = 0; a_1 = 1/2;\ a_n = n\, a_{n-2}$, si $n \geq 2$
e) $a_1 = 3;\ a_n = a_{n-1} + 3^n$, si $n > 1$

Inducción y Recursividad

2.3 Para cada una de las siguientes relaciones de recurrencia dar el orden, indicar si es, homogénea, si sus coeficientes son constantes, si es lineal.

$$a)a_n = -2a_{n-1}, b)a_n = 2na_{n-1}, c)a_n = 2na_{n-3} + a_{n-1}, d)a_n = 8a_{n-2} - 6a_{n-3} + n^2 + 5,$$

$$e)a_n = (n\log 2)a_{n-2} - 6(a_{n-3})^2,\ f)\,a_n = -2a_{n-1} + n,\ g)\,a_n + n(n-1) = n!$$

2.4 Definir las siguientes sucesiones mediante una relación de recurrencia y clasificarla

a) S_1 = 0; 1; 3; 6; 10; 15;...........
b) S_2 = 1; 3; 4; 7; 11; 18; ....
c) S_3 = 1; 3; 7; 15; 31; ....
d) S_4= 1; -3; 9; -27; 81; ....
e) S_5= 2; 3; 5; 8; 12; ....
f) S_6= 2; 4; 8; 16; ....

2.5 Dar la solución general y la solución particular para las condiciones iniciales dadas en da uno de los siguientes casos

$a)a_n = 2a_{n-1} + 8a_{n-2}, a_0 = 1, a_1 = 0$
$b)a_n = 6a_{n-1}, a_0 = 2$
$c)a_n = 7a_{n-1} - 10a_{n-2}, a_0 = 5, a_1 = 2$
$d)a_n = -8a_{n-1} - 16a_{n-2}, a_0 = 2, a_1 = -10$
$e)a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2}, a_0 = 2, a_1 = 0$
$f)a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2}, a_0 = 1, a_1 = 2$
$g)a_n = a_{n-4} - a_{n-3} + a_{n-2} - a_{n-1}, a_0 = 1 = a_3, a_1 = 2 = a_4$

2.6 Probar, usando inducción los resultados del ejercicio 2.5

2.7 Resolver cada una de las siguientes cuestiones

a) Encontrar una relación de recurrencia lineal, homogénea con coeficientes constantes, con una condición inicial, que determine la siguiente sucesión y verificar usando inducción.

S_n = 3; 6; 12; 24; ....

b) Encontrar la solución general de la recurrencia : $a_{n+2} - 3a_{n+1} = 0$. Probar lo obtenido usando inducción.

c) Para la siguiente relación de recurrencia: $2r_n = 12r_{n-1} - 22r_{n-2} + 12r_{n-3}$ se pide: la solución general y una solución particular para las condiciones iniciales: $a_1 = 0$; $a_2 = -1$ y $a_3 = 1$.

d) Sabiendo que $r_1 = -1$ y $r_2 = 2$, son los ceros de la ecuación característica de una relación de recurrencia lineal y homogénea con coeficientes constantes, se pide definir la relación y dar la solución particular si $a_0 = 1$ y $a_1 = -2$ son las condiciones iniciales.

e) Si la solución de una relación de recurrencia es $a_n = \frac{1}{4}(2)^n - 2(-2)^n, n \geq 0$, se pide reconstruirla indicando las condiciones iniciales y clasificarla.

Relaciones recurrencia con raíces complejas

Observación: cuando los ceros de la ecuación característica son números complejos, para hallar la solución general debemos usar la fórmula que nos brinda el Teorema de Moivre[1]

La expresión polar de un número complejo es $z = x + y\,i = r(\cos\varphi + i\,\operatorname{sen}\varphi)$

El teorema de Moivre se usa para calcular la potencia enésima de un número complejo y tiene la siguiente expresión:

$z^n = r^n(\cos n\varphi + i\,\operatorname{sen} n\varphi)$ (que puede probarse usando inducción).

En el caso que tengamos que resolver una ecuación de recurrencia donde las raíces de la ecuación característica sean complejas, sólo hallaremos, en este curso, la solución general ya que para calcular las soluciones particulares es necesario poner en juego saberes previos que no tenemos.

Ejemplo para $a_n = 2\,a_{n-1} - 2\,a_{n-2}$

El polinomio característico es $p(x) = x^2 - 2x + 2$
Los ceros de la ecuación característica son: $r_1 = 1 + i$, $r_2 = 1 - i$
La solución general es $a_n = A(1 + i)^n + B(1 - i)^n$.

2.8 Dar la solución general de las siguientes relaciones de recurrencia

a) $a_n = -a_{n-2}$
b) $a_n = -4a_{n-2}$
c) $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$

[1] Se utiliza para calcular las raíces de un número complejo

Relaciones recurrencia lineal no homogénea

Llamamos relación de recurrencia lineal no homogéneas de orden k, con coeficientes constante, a una expresión de la forma siguiente:

$a_n = k_1a_{n-1} + k_2a_{n-2} + \ldots + k_r a_{n-r}$ con $n > r$ (I)

donde $\forall i=0,k$, los k_i son números reales
$n > k$, $n \in \mathbf{N}$
$a_n = f(n)$

Si $f(n)= 0$ es homogénea

Algunos ejemplos:

a) $a_n = 2a_{n-1} + 3(2^n)$
b) $an + 2a_{n-1} = n^2 - n - 1$
c) $a_n - 2a_{n-1} + a_{n-2} = 3$

¿Cómo se resuelven?

1) Dada (I) (que es la ecuación de recurrencia que se quiere resolver), llamamos relación de recurrencia homogénea asociada a (I) a la siguiente:

$0= k_1a_{n-1} + k_2a_{n-2} + \ldots + k_r a_{n-r}$ con $n > r$ (II)

2) Aceptamos , sin demostrar, la siguiente propiedad:

Cualquier solución (a_n) de (I), para determinadas condiciones iniciales puede escribirse como:

$$\mathbf{a_n = p_n + h_n}$$

h_n es la solución de homogénea asociada
p_n es una solución particular de (I)

3) Para hallar la solución particular de (I) , no hay una regla general, sino un conjunto de pautas

4) Algunos ejemplos:

a) $a_n - 3a_{n-1} = 2$
en este caso f(n) es una constante, no depende de n, se puede probar con $a_n = A$

se sustituye en la ecuación y se obtiene:

$A - 3A = 2$, de donde $A = -1$, por lo tanto la solución particular buscada es $a_n = -1$ sólo resta buscar la solución de la homogénea asociada

b) $a_{n+1} - a_n = n$, $a_2 = 1$, $n \geq 2$ (I)

La homogénea asociada es $a_{n+1} - a_n = 0$, de donde $a_{n+1} = a_n$ cuya solución es $K(1)^n$

La solución particular se puede pensar como un polinomio de grado 1, digamos $A\,n + B$, siendo B solución de la homogénea, por ser una constante de donde conviene multiplicar $(A\,n + B)$ por la menor potencia de n que asegure la no existencia de constantes (en este caso n)

Queda $a_n = A\,n^2 + Bn$, (I) se escribe $a_{n+1} = a_n + n$

Se reemplaza y queda:

$A(n+1)^2 + B(n+1) = A\,n^2 + Bn + n$, operando y comparando los coeficientes de las potencia semejantes queda:

Para n^2: $A=A$,
Para n: $2A + B = B + 1$
Para el término independiente: $A + B = 0$

$A = \frac{1}{2}$, $B = -\frac{1}{2}$

La solución particular es:
$a_n = \frac{1}{2}n^2 + (\frac{-1}{2})n$

La solución de la homogénea asociada es k
La solución que se busca es:

$a_n = \frac{1}{2}n^2 + (\frac{-1}{2})n + c$

Usando las condiciones iniciales queda que c debe ser 0 y por lo tanto
$a_n = \frac{1}{2}n^2 + (\frac{-1}{2})n$

c) Si la ecuación es $a_n = 3\,a_{n-1} + 5(3^n)$ se puede proponer $p_n = A3^n$
Como la solución de la homogénea asociada es $k3^n$, reemplazando se llega a una contradicción y por lo tanto se modifica por $p_n = An3^n$ y queda $5n3^n$ como solución particular quedando como solución general: $an = k3^n + 5n3^n$, donde el valor de k se obtiene aplicando las condiciones iniciales.

d) La siguiente tabla nos ayuda para encontrar la forma de la solución particular en algunos casos determinados

F(n)	**Solución particular**
k	constante
n	$An + B$
n^2	$An^2 + Bn + C$
n^t t natural	Polinomio completo de grado t
r^n r real	Ar^n

2.9 Resolver cada una de las siguientes recurrencias

a) $a_n = 4a_{n-1} - 3(4^n)$

b) $a_n + 2a_{n-1} = n^2$

c) $a_n - 2a_{n-1} = 3^n$

TRABAJO PRÁCTICO Nº 5

Estructuras Algebraicas Finitas

1. Justificando, indicar cuales de las siguientes operaciones binarias son cerradas en el conjunto dado en cada caso:

a) $A = N, \quad a * b = 2a.b$
b) $A = Z, \quad a * b = a + 2b$
c) $A = P(B), \ a * b = a \cap b$
d) $A = R, \ a * b = 2a + b - 3c, c \geq a - b$
e) $A = R, \ a * b = |a.b|$
f) $A = N, \ a * b = \begin{cases} \min\{a, b\} \text{ si } \min\{a, b\} \leq 4 \\ \max\{a, b\} \text{ en otro caso} \end{cases}$
g) $\left(A = \left\{\begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix}, a, b \in Z\right\}; *\right), x * y = x.y$
h) $(A = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}; *), x * y = (x \cup y) - (x \cap y)$
i) $(A = R - \{0\} \times R; *), (x; y) * (z; t) = (x.z; y.z + t)$

2. Con referencia al ejercicio anterior, cuando corresponda, estudiar las propiedades y la existencia de elementos característicos

3. Analizar si los siguientes pares de operaciones se distribuyen mutuamente

a) $a * b = a + b$, $a \blacklozenge b = a.\,b$ en el conjunto R de los números reales
b) $a * b = a + b$, $a \blacklozenge b = a^b$ en el conjunto R de los números reales
c) $a * b = (a, b)$, $a \blacklozenge b = [\,a, b\,]$ en el conjunto N de los números naturales
d) $a * b = X \cap Y$, $a \blacklozenge b = X \cup Y$ en $A = \{\varnothing, \{a, b\}, \{c\}, \{a, b, c\}\}$
e) $a * b = X \cap Y$, $a \blacklozenge b = X \cup Y$ en $P(A)$, $\forall A$

4. Considerar $A = \{a, b\}$ y el conjunto $A^A = \{f: A \rightarrow A\}$. En A^A se define $f*g = g\,[f]\,(x)$ $\forall x \in A$. Se pide dar la tabla para la operación $*$.Estudiar las propiedades y hallar el elemento neutro. Indicar los elementos que tienen simétrico.

5. Para el conjunto $A = \{2, 4, 8, 16, 32\}$ y las operaciones binarias y cerradas $a * b = (a, b)$ y $a \bullet b = [a, b]$ donde (a, b) denota el máximo común divisor entre a y b, y $[a, b]$ el mínimo común múltiplo.Se pide : a)Estudiar en cada caso las propiedades, b) la existencia de elementos característicos, c)indicar si se distribuyen mutuamente, d)Justificar cada afirmación.

6. Indicar, justificando, cuáles de los siguientes pares alcanzan la estructura de grupo, cuales son semigrupos y en todos los casos analizar la conmutatividad.

a) $(N_0;+),(Z;+),(R-\{0\};.),(Z;.),(N;.),(Q;.),(R;+)$

b) $(Z;*), a*b = a+b+n, n \in Z$

c) $(R;*), a*b = \frac{a.b}{2} - \frac{2}{3}$

d) $(R-\{0\};*), a*b = \frac{2}{ab}$

e) $\left(A = \left\{\begin{bmatrix} 1 & b \\ b & 1 \end{bmatrix}, b \in Z\right\};*\right), x*y = x.y$

f) $(A = \{\emptyset,\{a\},\{b\},\{a,b\}\};*), x*y = (x-y)\cup(y-x)$

g) $(A = R-\{0\}\times R;*), (x;y)*(z;t) = (xz;0)$

7. Sea $G = \{a,b,c,d\}$ y $(G;*)$ un grupo. Se pide determinar los elementos que faltan en la tabla de la operación *

*	a	b	c	d
a		b		d
b	b		d	
c		d		b
d	d		b	

8. Sea $X \neq \emptyset$, demostrar que $(A = \{f : S \to S / f \text{ es biyectiva}\};*)$, donde $f*g = f[g(x)], \forall x \in S$ tiene estructura de grupo. ¿Qué pasa si las funciones son inyectivas?

9. Aplicar el resultado anterior al conjunto finito $A = \{a,b,c\}$.

10. Sean $(G_1;*_1)$ y $(G_2;*_2)$ dos grupos con neutro e_1 y e_2 respectivamente. Probar que $(G_1 \times G_2;*), (x;y)*(z;t) = (x *_1 z; y *_2 t)$ es un grupo, e indicar las condiciones para que sea abeliano.

11. Aplicar el resultado del ejercicio anterior a

$(A = \{0,1\};*_1)$,

$*_1$	0	1
0	0	1
1	1	0

$(B = \{0,1,2\};*_2)$,

$*_2$	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

12. Demostrar:

a) Si $(G;*)$ es un semigrupo con neutro e, el conjunto $G' = Inv(G) = \{x \in G / x' \in G\}$

es un grupo.

b) Si $(G;*)$ es un grupo entonces $(G;\bullet)$ donde $x \bullet y = y * x$ es un grupo

c) Si $(G;*)$ es un grupo con neutro e, $x, y \in G$ entonces $(x * y)' = y' * x'$

d) $(G;*)$ es un grupo abeliano $\Leftrightarrow (x * y)' = x' * y'$

e) Si $(G;*)$ es un grupo con neutro e; dados a, b probar que existen x, y tales que $a * x = b, y * a = b$ y que esos elementos son únicos

f) Si $(G;*)$ es un grupo con neutro e, probar: $a * c = b * c \Rightarrow a = b, c * a = c * b \Rightarrow a = b$

g) Si $(G;*)$ es un grupo con neutro e donde para cada elemento x, $x * x = e$ entonces G es un grupo abeliano

13. Resolver, si es posible, las ecuaciones en el conjunto dado con la operación indicada en cada caso

a) $(Z;.), 2.x = 2$

b) $(1;2) * (x;y) = (0;1)$ en el grupo del ejercicio nº 11

c) $(1;2) + (x;y) = (2;9)$ en $(N^2;+)$, N es el conjunto de los números naturales

d) $2x + 1 = -3$ en R con la multiplicación usual

14. Se sabe que en todo grupo, el elemento neutro es su propio simétrico. Probar que si $(G;*)$ es un grupo y $|G|$ es par, entonces hay, por lo menos, otro elemento de G que es su propio simétrico

15. Sea $(G;*)$ un grupo con neutro e, sea $H \subseteq G$. Demostrar que H es un subgrupo de G si y solamente si :

$H \neq \varnothing$,

$a \in H, b \in H$ entonces $a * b' \in H$

16. Responder cada una de las siguientes cuestiones:

a) Para el grupo $(A = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}\}; *), x * y = (x \cup y) - (x \cap y)$.
Probar si $H = \{\varnothing, \{a\}\}, T = \{\varnothing, \{a,b\}\}, P = \{\{b\}, \{a\}\}$ son subgrupos

b) Sea $S = \{a,b,c\}$ y el grupo $(A = \{f: S \to S / f \text{ es biyectiva}\}; *), f * g = f[g(x)], \forall x \in S$
Probar si $H = \{f_1, f_2\}, T = \{f_1, f_4, f_5\}$ son subgrupos. Considerar:

$f_1 = \{(a;a),(b;b),(c;c)\}, f_2 = \{(a;b),(b;c),(c;a)\}, f_3 = \{(a;c),(b;b),(c;a)\},$

$f_4 = \{(a;a),(b;c),(c;b)\}, f_5 = \{(a;b),(b;a),(c;c)\}, f_6 = \{(a;c),(b;a),(c;b)\}$

c) Para el grupo $(Z;+)$, probar que $H = nZ = \{x \in Z, x = nz, n, z \in Z, n \text{ es fijo}\}$ es subgrupo

17. Sea $(G;*)$ un grupo y sean y H, K subgrupos. Demostrar o refutar cada una de las siguientes afirmaciones:

a) $H \cap K$ es un subgrupo de $(G;*)$
b) $H \cup K$ es un subgrupo de $(G;*)$
c) $H - K$ es un subgrupo de $(G;*)$
d) $H \Delta K$ es un subgrupo de $(G;*)$

18. Considerar el conjunto $A = \{(0;0),(0;1),(1;0),(1;1)\}$ y la operación $*$ dada por :

$$(a;b)*(c;d)\begin{cases}(a+c;b+d) \text{ si } & a+c \le 1, b+d \le 1\\ (0;0) \text{ en cualquier otro caso}\end{cases}$$

Se pide: analizar si $(A;*)$ tiene estructura de grupo En caso afirmativo, determinar todos los subgrupos. En caso negativo, definir un subconjunto de A que con la misma operación tenga estructura de grupo y determinar todos sus subgrupos. Justificar.

19. Probar que:

a) $(Z_n;\bar{+})$ con $[a]\bar{+}[b] = [a+b]$ es un grupo abeliano
b) $(Z_n;\otimes)$ con $[a]\otimes[b] = [a.b]$ es un semigrupo abeliano
c) Probar que en el grupo $(A = \{1,2,3,4\};*)$ con la operación dada por

*	4	3	2	1
4	4	3	2	1
3	3	4	1	2
2	2	1	4	3
1	1	2	3	4

la relación $R \subseteq A^2$ definida por la siguiente matriz $M_R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

es una relación de congruencia (equivalencia y compatible con la operación dada)

20. Hallar el subgrupo generado por el elemento dado en cada uno de los siguientes casos:

a) $\langle i \rangle, (G = \{1, -1, i, -i\}; .)$

b) $\langle (a;b), (b;c), (c;a) \rangle$ en S_3

c) $\langle c \rangle$ en $(G;*)$ con la operación definida por la siguiente tabla :

*	a	b	c	d	e	f
a	a	b	c	d	e	f
b	b	c	d	e	f	a
c	c	d	e	f	a	b
d	d	e	f	a	b	c
e	e	f	a	b	c	d
f	f	a	b	c	d	e

21. Sabiendo que para el grupo de los restos módulo n, los generadores son:
$\text{Gen } Z_n = \{[k] / (k,n) = 1, 1 \le k \le n-1\}$, se pide dar los generadores para n = 18 y n primo.

22. Dar la red de subgrupos para el grupo simétrico S_3, para el grupo de los restos módulo 8, módulo 5 y módulo 12 y el grupo del ejercicio nº 18

23. Un grupo G tiene subgrupos H y K. Encontrar todos los posibles órdenes de H□K, para cada uno de los siguientes casos:

a) $|H| = 16$, $|K| = 20$
b) $|H| = |K| = 7$
c) $|H| = 3$, $|K| = 5$
d) Si $|G| = 24$ y $|H| = 4$, ¿cuáles son los posibles órdenes para el cardinal de K?

24. Hallar las clases laterales determinadas por cada subgrupo en el grupo dado en cada caso. Indicar, además cuáles son subgrupos normales.

a) $\langle (0;0) \rangle$ en el grupo del ejercicio 11
b) Para los subgrupos del grupo del ejercicio nº18
c) Para el grupo $\left(\left\{\begin{pmatrix} a & 0 \\ c & d \end{pmatrix}, a, c, d \in \mathbb{R}\right\}; +\right)$ y el subgrupo $S = \left\{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix}, c \in \mathbb{R}\right\}$
d) Para el grupo $(Z_{12};+), H = \langle \bar{6} \rangle$
e) Para el grupo $(Z_{25} - \{0\}; \otimes); H = \{\bar{1}, \bar{6}, \overline{11}, \overline{21}\}$

25. Sea $(G;*)$ un grupo y sea el conjunto $Z_G = \{x \in G / x * a = a * x, \forall a \in G\}$. Probar que es un subgrupo de G e indicar si es normal. Justificar cada afirmación.

26. Sean $(G;*)$ un grupo y H un subgrupo probar:

a) Si $|G| = n$, H es subgrupo de $(G;*)$ y $|H| = \frac{n}{2}$ entonces H es normal

b) Si $|G| = n$, H es subgrupo de $(G;*)$ entonces $|H| / |G|$

27. Sea $(G;*)$ un grupo y $(H_i)_{i\in N}$ una familia de subgrupos de $(G;*)$.N es el conjunto de los números naturales, probar que $\bigcap_{i=1}^{n} H_i$ es un subgrupo del grupo dado. Si todos los subgrupos fueran normales, se pide demostrar que la intersección es un subgrupo normal. Justificar cada afirmación.

28. Probar si las siguientes funciones son homomorfismos de grupos, si corresponde dar núcleo e imagen

a) $f:(Z_3;\bar{+}) \to (Z_3;\bar{+}) / f([x]) = 3 - x$

b) $f:(Z;+) \to (5Z;+) / f(x) = 5x$

c) $f:(R - \{0\};.) \to (R - \{0\};.) / f(x) = |x|$

29. Hallar todos los isomorfismos entre los grupos $(Z_4;\bar{+})$ y $(Z_5 - \{0\};\otimes)$

30. Indicar, justificando, si el grupo simétrico S_4 es isomorfo al grupo de los restos módulo 24 $(Z_{24};\bar{+})$

31. Probar que la función $f:(R;+) \to (M_2(R);.) / f(x) = \begin{bmatrix} \cos x & -\operatorname{sen} x \\ \operatorname{sen} x & \cos x \end{bmatrix}$ es un homomorfismo de grupos. Clasificarlo.

32. Considerar el subgrupo multiplicativo de C (números complejos), $\langle i \rangle = \{i,-i,1,-1\}$ y el grupo los restos módulo 4. Se pide probar que son isomorfos.

33. Sea $f: G_1 \to G_2$ un isomorfismo de grupos, probar que la función inversa $f_1^{-1}: G_2 \to G_1$ es también un isomorfismo

34. Hallar el índice que cada subgrupo determina en el grupo simétrico S_3 y en el grupo de los restos módulo 12. Dar, cuando corresponda el grupo cociente.

35. Responder, justificando adecuadamente si los siguientes enunciados son verdaderos o falsos:

a) En un grupo cada elemento tiene un único simétrico
b) Un grupo puede tener mas de un neutro
c) Puede haber un grupo donde falle la propiedad cancelativa
d) Todo conjunto de números que es grupo bajo la suma lo es respecto de la multiplicación
e) Todo subconjunto de un grupo es un subgrupo bajo la operación inducida
f) El grupo simétrico S_n tiene n elementos

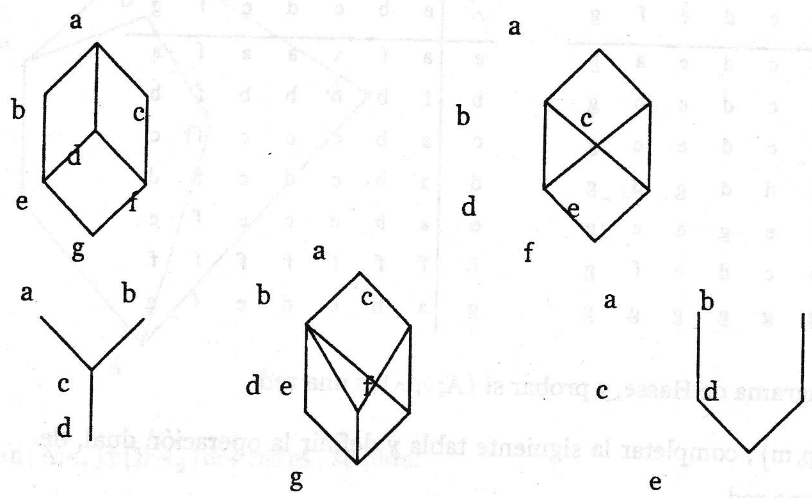
g) Todo grupo cíclico es abeliano
h) Todo grupo abeliano es cíclico
i) Todo subgrupo de un grupo abeliano es abeliano y normal
j) Si un subgrupo de un grupo G es abeliano, el grupo G es abeliano
k) Todo grupo factor de un grupo infinito es infinito
l) La composición de homomorfismos de grupos es un homomorfismo de grupos
m) Todos los grupos del mismo orden son isomorfos

U.T.N.F.R.B.A.-DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA EN SISTEMAS DE INFORMACIÓN
MATEMÁTICA DISCRETA – CÁTEDRA GRANADO PERALTA
AÑO 2011
TRABAJO PRÁCTICO Nº6

Álgebras de Boole

Redes

1. Indicar, justificando, cuáles de los siguientes conjuntos ordenados constituye una red



2. Considerar el conjunto ordenado $(A = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\};\ll)$. Se sabe $4 \parallel 2 \parallel 3, 5 \parallel 7, 6 \parallel 8 \parallel 9$, $\text{m.c.i.}\{2,5\} = 2$, $\text{m.c.i.}\{3,7\} = 3$, $\forall x, 1 \ll x, \forall x, 10 \ll x$ $\text{m.c.i.}\{7,8\} = \text{m.c.i.}\{7,6\} = \text{m.c.i.}\{7,9\} = 7$, $\text{m.c.s.}\{2,5\} = \text{m.c.s.}\{3,5\} = \text{m.c.s.}\{4,5\} = 5$, $\text{m.c.s.}\{5,6\} = 6$. Si "m.c.s" significa menor cota superior y "m.c.i." significa mayor cota inferior, indicar si la información suministrada es suficiente para hacer el diagrama de Hasse.

3. Demostrar o refutar:

   a) Si $(A;\ll)$ está bien ordenado entonces es una red

   b) Sea $(A;\ll)$ una red, A está totalmente ordenado $\Leftrightarrow \forall x \in A, \forall y \in A$,
   $\text{m.c.s.}\{x,y\} = y, \text{m.c.i.}\{x,y\} = x$

   c) El conjunto {0, 1} con la conjunción y la disyunción es una red.

4. Resolver, justificando, cada una de las siguientes cuestiones:

a) Para la red $(D_{42}; |)$ hallar dos subconjuntos distintos B y C de manera tal que B con el orden restringido sea una subred y que C no lo sea.

b) Sea $(P(A);\subseteq)$, con $A = \{1,2,3\}$. Definir las operaciones cerradas

$\cap : P(A)\times P(A) \to P(A)$

$\cup : P(A)\times P(A) \to P(A)$, y mostrar que $(P(A);\cup;\cap)$ es una red.

5. Considerar en conjunto A = {a, b, c, d, e, f, g } y las operaciones dadas por las tablas

$\vee$	a	b	c	d	e	f	g
a	a	c	c	d	e	a	g
b	c	b	c	d	e	b	g
c	c	c	c	d	e	c	g
d	d	d	d	d	g	d	g
e	e	e	e	g	e	e	g
f	a	b	c	d	e	f	g
g	g	g	g	g	g	g	g

$\wedge$	a	b	c	d	e	f	g
a	a	f	a	a	a	f	a
b	f	b	b	b	b	f	b
c	a	b	c	c	c	f	c
d	a	b	c	d	c	f	d
e	a	b	c	c	e	f	e
f	f	f	f	f	f	f	f
g	a	b	c	d	e	f	g

Se pide dibujar el diagrama de Hasse, y probar si $(A; \vee; \wedge)$ es una red

6. Sea $A = \{a, b, c, d, p, m\}$, completar la siguiente tabla y definir la operación dual, de modo de obtener una red.

$\vee$	a	b	c	d	m	p
a		b	d	d	a	p
b			p	p	b	p
c				d	c	p
d					d	p
m						p
p						

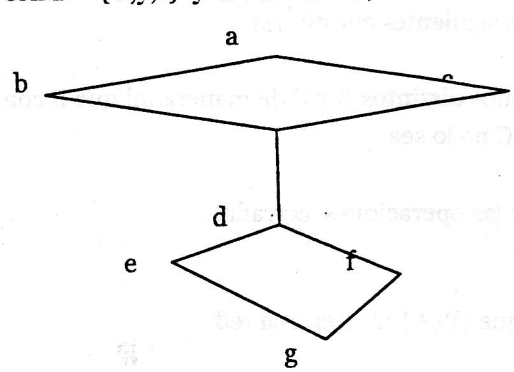
7. Sobre un conjunto finito A, considerar una red con primer elemento p y último elemento u, e indicar los elementos neutro y absorbente para cada una de las operaciones. Justificar en cada caso.

8. ¿Cuáles de las siguientes son redes distributivas?

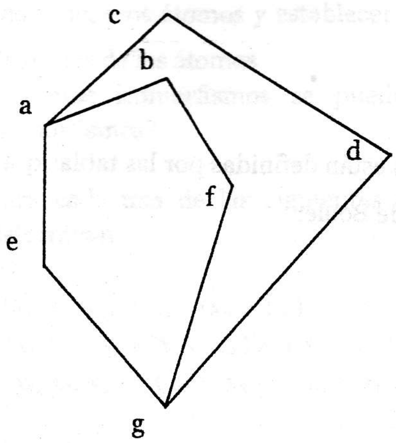
a) D_{20}, $a \vee b$ = mcm { a, b }= [a, b]; $a \wedge b$ = mcm { a, b }= (a, b)

b) A = P (B) con B = { x,y,z} y $a \vee b = a \cup b$; $a \wedge b = a \cap b$

c)



d)



9. Sean $(A;\prec_1)$ y $(B;\prec_2)$ dos redes, se pide:

a) Probar que $(A \times B;\prec)$ donde $(x;y) \prec (z;t) \Leftrightarrow x \prec_1 z \wedge y \prec_2 t$ es una red

b) Si $(A;\vee_1;\wedge_1)$ y $(B;\vee_2;\wedge_2)$ son redes distributivas, probar que $(A \times B;\vee;\wedge)$, donde:

$(x;y) \vee (z;t) = (x \vee_1 z; y \vee_2 t)$,

$(x;y) \wedge (z;t) = (x \wedge_1 z; y \wedge_2 t)$

Es una red distributiva.

10. Considerar las redes de los ejercicios 4, 5, 6 y 8 y hallar los elementos complementarios. Identificar los casos en que cada elemento tiene un único complemento, aquellos en los que todos los elementos tienen complemento y aquellos en los que existen elementos sin complemento.

11. Resolver indicando si la solución existe y en ese caso decir si es única,

a) En $(D_{42};[x,y];(x,y))$, $\begin{cases} 21 \vee x = 7 \\ 21 \wedge x = 42 \end{cases}$, $[x,y] = x \vee y, (x,y) = x \wedge y$

b) En $(P(A);\cup;\cap)$, con $A = \{a,b,c\}$, $\overline{\{b\}} \cap X = \varnothing$

c) En $(D_{20};[x,y];(x,y))$, $\{\bar{2} \vee x = 1$, $\quad [x,y] = x \vee y, (x,y) = x \wedge y$

12. Establecer un isomorfismo para cada uno de los siguientes casos.

a) $A = D_{42}, B = D_{30}$

Álgebras de Boole

b) $A = P(C), C = \{1,2,3\}$ y $B = \{x \in P(L)\}$, L es el conjunto de átomos de $P(C)$

Álgebra de Boole – Funciones booleanas

1. Probar que $(A = \{1,2,3,4\}; \vee; \wedge)$, donde las operaciones están definidas por las tablas que se dan a continuación, alcanza la estructura de álgebra de Boole:

$\vee$	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	2	2	2	2
3	3	2	3	2
4	4	2	2	4

$\wedge$	1	2	3	4
1	1	1	1	1
2	1	2	3	4
3	1	3	3	1
4	1	4	1	4

2. Indicar, justificando, cuáles de los siguientes conjuntos con las operaciones dadas en cada caso alcanzan la estructura de Álgebra de Boole.

a) $(D_n; \vee; \wedge)$, $a \vee b = [a,b], a \wedge b = (a,b), n = p_1.p_2.p_3....p_n$ con $p_i \neq p_j$ si $i \neq j$

b) $(D_n; \vee; \wedge), a \vee b = [a,b], a \wedge b = (a,b)$

c) $(A; \vee; \wedge)$, donde $|A| = 18$

d) Si A es un conjunto, $(P(A); \cup; \cap)$

3. Analizar la validez de las siguientes propiedades en un álgebra de Boole B, con neutro 0_B y 1_B para las operaciones $\vee, \wedge$ respectivamente, dar un contraejemplo si son falsas

a) $\forall a, \forall b, a = b \Leftrightarrow (a \wedge \bar{b}) \vee (\bar{a} \wedge b) = 0_B$

b) $\forall a, \forall b, (a \wedge b) \vee (a \wedge \bar{b}) = a$

c) $\forall a, \forall b, \overline{(a \wedge b)} = \bar{a} \vee \bar{b}$

d) $\forall a, \forall b, \forall c, a \vee (b \wedge \bar{c}) = \overline{\bar{a} \wedge (b \vee c)}$

e) $\forall a, \forall b, a \leq b \Leftrightarrow b \leq a$

f) $\forall a, \forall b$, si $a \leq b \Rightarrow a \wedge (b \wedge c) = b \wedge (a \wedge c)$

g) $\forall a, \forall b, \forall c, a \vee (b \wedge c) = b \wedge (a \vee c)$

4. Para el álgebra de Boole $(D_{105}; \vee; \wedge)$ donde $a \vee b = [a,b], a \wedge b = (a,b)$, se pide :

a) El diagrama de Hasse.
b) El complemento de cada elemento

c) 3 sub álgebras distintas de la trivial

d) Identificar los átomos y establecer definir un isomorfismo entre $(D_{105};\vee;\wedge)$ y el conjunto de partes de los átomos

e) ¿Cuántos isomorfismos se pueden definir? ¿cuántas funciones biyectivas no son isomorfismos?

5. Para cada una de las siguientes expresiones booleanas dar la función booleana que determinan.

a) $E_1(x_1; x_2; x_3) = x_1 \vee (x_2 \wedge x_3)$

b) $E_2(x_1; x_2; x_3) = (x_1 \vee x_2) \wedge (x_1 \vee x_3)$

c) $E_3(x_1; x_2; x_3) = (x_1 \wedge x_3) \vee (x_1 \wedge x_2) \vee \overline{(x_2 \wedge x_1 \wedge x_3)}$

6. Simplificar

a) $f(x_1;x_2;x_3) = x_1 \vee \left[\left(\overline{x_1} \vee x_2\right) \wedge \left(x_1 \vee x_2 \vee \overline{x_3}\right)\right]$

b) $f(x_1;x_2;x_3) = [(x_1 \wedge x_2) \vee (x_2 \wedge x_1) \vee \overline{x_3}] \wedge x_2$

c) $f(x_1;x_2) = x_1 \wedge \left[x_2 \vee \left(\overline{x_2} \wedge \left(x_2 \vee \overline{x_2}\right)\right)\right]$

7. Expresar las siguientes funciones booleanas en forma canónica en minitérminos (forma normal disyuntiva) y en forma canónica en maxitérminos (forma normal conjuntiva)

a) $f(x_1;x_2;x_3) = \overline{x_1} \wedge \left(\overline{x_2 \wedge x_3}\right)$

b) $f(x_1;x_2;x_3) = x_1 \vee (x_2 \vee x_3)$

c) $f(x_1;x_2;x_3) = \overline{x_2 \vee \left(\overline{x_2 \wedge x_3}\right)}$

d) $f(x_1;x_2;x_3) = (x_1 \vee x_2) \wedge (x_1 \vee x_3)$

e) $f(x_1; x_2) = (x_1 \vee x_2) \wedge (x_1 \wedge x_3)$

8. Cada una de las siguientes tablas definen funciones booleanas. Se pide:

a) Las formas canónicas en minitérminos y maxitérminos en cada caso.

b) La forma canónica en maxitérminos para $h(x) = f(x; y; z) \wedge g(x; y; z)$

c) La forma canónica en minitérminos para $t(x) = f(x; y; z) \vee g(x; y; z)$

x	y	z	f (x; y; z)	g(x; y; z)
1	1	1	1	0
1	1	0	1	0
1	0	1	0	0
1	0	0	0	0

0	1	1	0	1
0	1	0	0	1
0	0	1	0	1
0	0	0	1	0

9. Diseñar una red de compuertas con entradas x, y que produzca salidas a, b, c en las siguientes condiciones:

- $a = 1, b = c = 0$, si $x \rangle y$
- $b = c = 0, a = 1$, si $x = y$
- $c = a = 1, b = 0$, si $x \langle y$

10. Un examen consta de 4 preguntas. Las respuestas correctas son la 1° es Verdadera, la 2° es Falsa, la 3° es Verdadera y la 4° es Falsa. Construir una función booleana que analice cada examen y distinga los aprobados de los reprobados. Se considera aprobado con tres o más respuestas correctas.

11. Se quiere construir una alarma para un automóvil a través de un sistema de compuertas de modo tal que la alarma suene si: Si el motor está funcionando y alguna de las puertas se encuentre abierta. El motor está sin funcionar, las luces encendidas y algunas de las ventanas está abierta. El motor está funcionando y el cinturón de seguridad se encuentra desabrochado. Se pide diseñar el sistema y dar su forma normal disyuntiva

12. Carlos ganó un bono de $6700 en un supermercado y el dinero se efectivizará sólo en el caso de utilizar la mayor cantidad posible, no repetir productos y elegirlos de la lista que se da a continuación. Se pide diseñar una red de compuertas que explicite la situación.

TELEVISOR	$3200
DVD	$1100
NOTEBOOK	$4500
NETBOOK	$2300

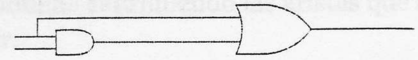
13. Describir, con una función booleana, cada uno de los siguientes diagramas de compuertas

U.T.N.F.R.B.A.-DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA EN SISTEMAS DE INFORMACIÓN
MATEMÁTICA DISCRETA – CÁTEDRA GRANADO PERALTA
AÑO 2011

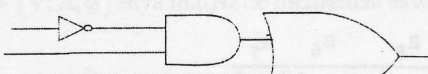
TRABAJO PRÁCTICO Nº6

Álgebras de Boole

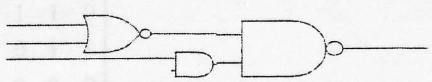
A)



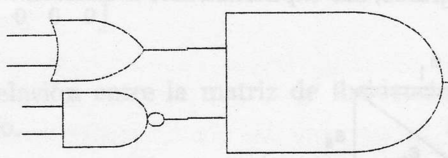
B)



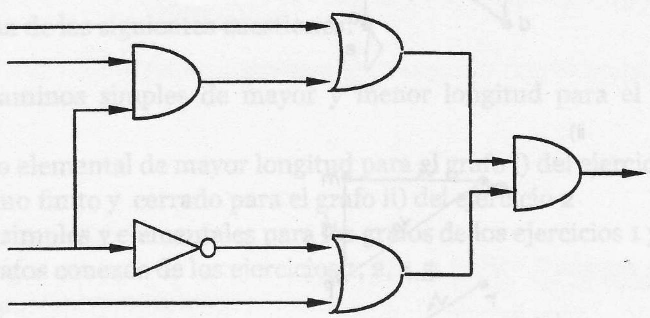
C)



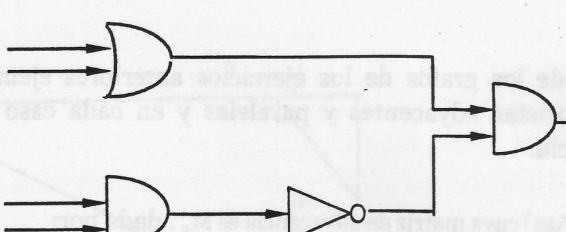
D)



E)



F)



TRABAJO PRÁCTICO Nº 7

Grafos, Dígrafos, Árboles

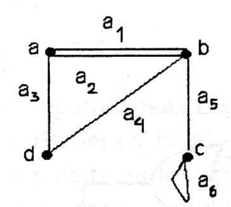
Grafos

1. Dibujar el grafo $G = \left(\{1,2,3,4,5,6\};\{a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6,a_7\};\varphi\right)$ dado por

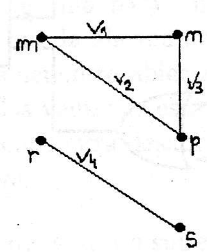
a_i	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7
$\varphi(a_i)$	$\{5,2\}$	$\{5,1\}$	$\{4\}$	$\{5,3\}$	$\{6,4\}$	$\{6,1\}$	$\{2,1\}$

2. Para cada uno de los siguientes grafos, dar explícitamente la función de incidencia

i)



ii)



3. Dar para cada uno de los grafos de los ejercicios anteriores ejemplos de vértices adyacentes, lazos, aristas adyacentes y paralelas y en cada caso las matrices de adyacencia e incidencia.

4. Para el grafo $G = (V;A;\varphi)$ cuya matriz de adyacencia es M_a, dada por:

$$M_a = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Se pide:

a) El diagrama del grafo
b) La matriz de incidencia
c) El subgrafo que se obtiene suprimiendo el subconjunto de los vértices cuyos elementos sean los de mayor y menor grado.

d) El subgrafo que se obtiene suprimiendo las aristas que inciden en por lo menos un vértice de grado par.

5. Dibujar el grafo $G = (V; A; \varphi)$ cuya matriz de incidencia es M_i, dada por:

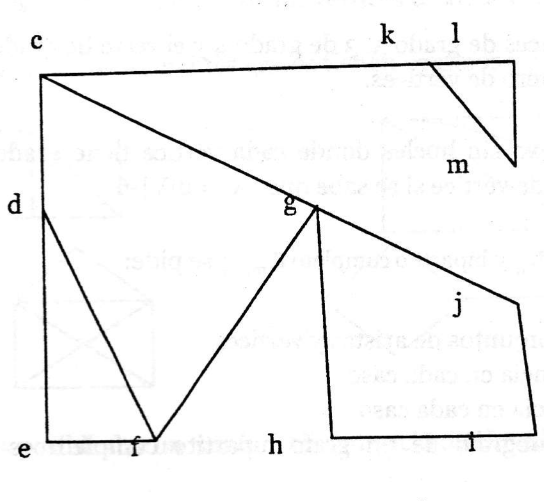
$$M_i = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

6. Establecer una relación entre la matriz de incidencia y las características del diagrama del grafo.

7. Resolver cada una de las siguientes cuestiones:

a) Identificar los caminos simples de mayor y menor longitud para el grafo del ejercicio 1
b) Indicar el camino elemental de mayor longitud para el grafo i) del ejercicio 2
c) Mostrar un camino finito y cerrado para el grafo ii) del ejercicio 2
d) Dar los caminos simples y elementales para los grafos de los ejercicios 1 y 2
e) Identificar los grafos conexos de los ejercicios 1, 2, 4,5

8. Considerar el siguiente grafo:



Resolver cada una de las siguientes cuestiones:

a) Caminos simples entre a y g

b) Menor número de aristas que es necesario suprimir para interrumpir el camino entre b y d
c) ¿Hay algún camino cerrado entre c y c de manera que pase solamente una vez por cada uno de los vértices restantes?
d) ¿Es posible partir del vértice c, pasar por todos los vértices y no regresar al c?
e) ¿ Se puede comenzar por un vértice recorrer todas las aristas exactamente una vez?(se permite pasar más de una vez por los vértices y no es necesario volver al vértice del que partió)

9. Dar el grado de cada vértice de los grafos de los ejercicios 8 y 1

10. Si G = (V; A;φ) es un grafo simple de 15 vértices, ¿pueden todos tener grado 5?

11. Dar el número de aristas de un grafo simple si sus vértices tienen los siguientes grados: 8, 6, 6, 4, 4

12. Estudiar si existe un grafo simpe con 5 vértices y los siguientes grados

a) 3, 3, 3, 3, 3, 2
b) 0, 1, 2, 2, 3
c) 3, 4, 3, 3, 2

13. Si G = (V;A;φ) es un grafo conexo con | A |=26 y grad. (v) ≥4 para todos los vértices de V, se pide indicar el número mayor del cardinal que puede alcanzar V.

14. Si G es un grafo simple con 52 aristas dar el menor número de vértices que puede tener

15. Un grafo tiene 32 aristas, 4 vértices de grado 5, 3 de grado 4 y el resto de grado 2. Se pide dar, justificando, el número de vértices.

16. Sea G = (V;A;φ) un grafo conexo sin bucles donde cada vértice tiene grado 3. Calcular el número de aristas y de vértice si se sabe que |A| = 2|V|-6

17. Considerar los grafos completo K_n y bipartito completo $K_{m,n}$; se pide:

a) En cada caso el cardinal de los conjuntos de aristas y vértices
b) Caracterizar la matriz de adyacencia en cada caso
c) Caracterizar la matriz de incidencia en cada caso
d) Indicar, justificando si todo subgrafo de un grafo bipartito completo es bipartito completo
e) Dar el número de puentes en cada caso

18. Demostrar o refutar con un contraejemplo:

a) Si $G = (V;A;\varphi)$ es un grafo completo con $|V| = n$, entonces $|A| = \dfrac{n.(n-1)}{2}$

b) En todo grafo de dos o mas vértices debe haber dos vértices del mismo grado

c) Todo subgrafo de un grafo bipartito es bipartito

19. Si es posible dar un camino y / o un ciclo de Euler para los siguientes casos:

a) Grafo bipartito completo $K_{2,4}$

b) Grafo del ejercicio 8

20. Para los grafos bipartito completo $K_{m,n}$ y completo K_n. Dar condiciones sobre m y n para el primero de los grafos y sobre n para el segundo para que existan caminos de Euler. Caracterizar, además en ambos casos la matriz de adyacencia

21. Sea $G = (V;A;\varphi)$ un grafo con un número par (2n) de vértices y matriz de adyacencia:

$$M = \begin{bmatrix} B & C \\ C & D \end{bmatrix}$$

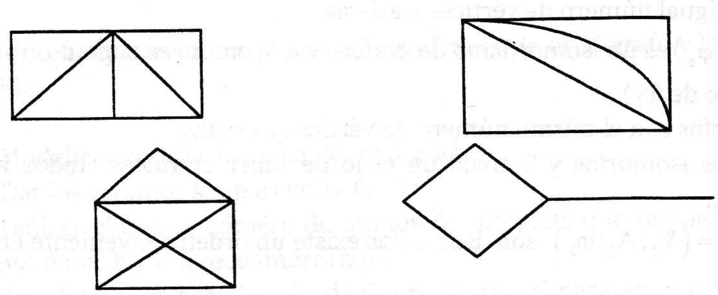
Se sabe que B, C, D son matrices cuadradas de orden n Responder, justificando, cada una de las siguientes cuestiones:

a) Si C es la matriz nula, ¿es conexo?

b) Si B=D, ¿es bipartito completo?

c) Si G es conexo y la suma de los vértices es 2n-2, ¿es un árbol?

22. ¿Cuáles de los siguientes grafos tienen caminos y / o ciclos de Hamilton



23. Si es posible dar un camino y / o un ciclo de Hamilton para los siguientes casos:

a) K_5, K_4 ¿influye que n sea par o impar?

b) $K_{2,3}, K_{2,2}, K_{3,3}$ ¿influye que n, m sean ambos pares o ambos impares, o uno par y el otro impar?

24. **Para las siguientes afirmaciones se pide, demostrarlas si son verdaderas y exhibir un contraejemplo si son falsas**

a) En un grafo completo $K_n, n \geq 3$, el número de aristas es $|A| = \frac{n(n-3)}{n} + n$

b) Para un grafo bipartito completo $G = K_{m,n}$, el cardinal de las aristas es n.m y el de los vértices m+n

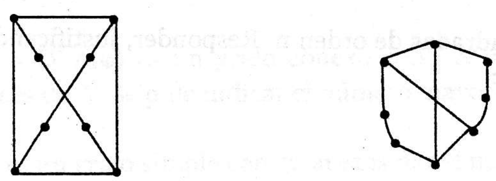
c) Todo subgrafo de un grafo bipartito completo es bipartito completo

d) Si $G = (V;A;\varphi)$ es un grafo no conexo con k componentes conexas y $|V| = n$, $|A| = m$. Entonces, $n \leq m + k$

25. **Indicar si los siguientes pares de grafos son isomorfos, si corresponde exhibir el isomorfismo**

a)

b)



26. Demostrar o refutar:

a) Grafos isomorfos tienen igual número de vértices y aristas

b) $f : (V_1;A_1;\varphi_1) \to (V_2;A_2;\varphi_2)$ es un isomorfismo de grafos, $v \in V_1$ entonces el grado de v es el mismo que el grado de f(v)

c) Existen grafos no isomorfos con el mismo número de vértices y aristas

d) Si G y T son dos grafos isomorfos y T tiene un ciclo de Euler entonces todos los vértices de G tiene grado par.

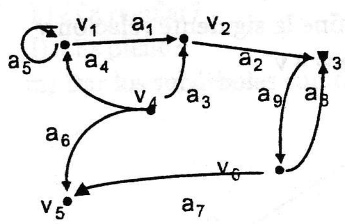
e) Si $G_1 = (V_1;A_1;\varphi_1)$ y $G_1 = (V_2;A_2;\varphi_2)$ son isomorfos existe un orden conveniente en V_2 / $M_a(G_1) = M_a(G_2)$

U.T.N.F.R.B.A.DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA EN SISTEMAS DE INFORMACIÓN
MATEMÁTICA DISCRETA – CÁTEDRA GRANADO PERALTA
AÑO 2011
TRABAJO PRÁCTICO Nº 7

Grafos, Dígrafos, Árboles

Dígrafos

1. Para el dígrafo $G = (V;A;\delta)$, cuyo diagrama se da a continuación:



Resolver cada una de las siguientes cuestiones:

a) Definición formal
b) Bucles
c) Aristas paralelas y antiparalelas
d) Vértices y aristas adyacentes
e) Matriz de adyacencia
f) Matriz de incidencia
g) Pozos y fuentes
h) Grado positivo, negativo, neto y total para cada vértice

2. Siete ciudades A, B, C, D, E, F, G están conectadas por un sistema de autopistas, de la forma que se da a continuación:

(1) I-22 va de A a C pasando por B
(2) I-33 va de C a D, pasa por B y sigue hacia F
(3) I-44 va de D por E hacia A
(4) I-55 va de F a B pasando por G
(5) I-66 va de G a D.

Considerando que las ciudades son los vértices de un dígrafo y las autopistas las aristas, se pide:

a) Modelizar la situación usando un dígrafo
b) Dar los caminos simples entre G y D
c) Indicar el menor número de tramos de autopista que se pueden cerrar de modo que el paso entre B y D quede interrumpido
d) Justificar si es posible salir de C y regresar a C pasando por todas las otras ciudades solamente una vez
e) Indicar si es posible comenzar en alguna ciudad y viajar por todas las autopistas pasando por cada una de ellas solamente una vez(se pude visitar una ciudad mas de una vez y no es necesario regresar a la ciudad de la que se partió)

3. Hay cuatro tipos básicos de sangre: A, B, AB y o. El tipo o puede donar sangre a los cuatro tipos, A y B pueden donar a AB lo mismo que a su propio tipo pero el tipo AB sólo puede donar a AB. Dibujar un grafo dirigido que muestre esa información.

4. Sea G = (V; A;δ) un dígrafo, en el conjunto de vértices V se define la siguiente relación v Rw ⇔ "v = w ∨ existe un camino de v a w ∨ existe un camino de w a v"
Probar que la relación R es de equivalencia.

Árboles

1. Para el grafo G=(V; A; φ) ,con |V |= 5 dibujar todos los árboles no isomorfos.

2. Sean $G_1 = (V_1;A_1;\varphi_1)$ y $G_2 = (V_2;A_2;\varphi_2)$ dos árboles donde $|A_2|= 26$ y $|V_1| = 2|A_2|$. Determinar: $|V_1|$, $|V_2|$ y $|A_1|$.

3. Sea $G = (V;A;\varphi)$ un grafo conexo que tiene 23 aristas, 7 vértices de grado 1, 3 de grado 2, 7 de grado 3 y n vértices de grado a determinar para satisfacer, si es posible, cada una de las siguientes situaciones:

a) G sea un árbol
b) G no debe ser árbol

4. Probar que un árbol con n vértices tiene (n – 1) aristas

5. Sea T un árbol con 12 vértices que tiene 3 vértices de grado 3, 1 vértice de grado 2. Se pide dar la sucesión de gados de los vértices

6. Sea un grafo $G = (V;A;\varphi)$, conexo, sin ciclos y con n vértices, entonces $\sum_{v \in V} g(v) = 2(n-1)$

7. Sea $G = (V;A;\varphi)$ un grafo conexo, probar que es un árbol si y solamente si toda arista es un puente.

8. Sea $G = (V;A;\varphi)$ un bosque con n vértices y k componentes. Deducir y demostrar una expresión que calcule el número de aristas.

9. Después de etiquetar los vértices que no lo están en el diagrama I que representa un árbol, se pide responder cada una de las siguientes preguntas:

a) ¿Cuáles de los vértices son hojas?
b) ¿Qué vértice es la raíz?
c) ¿Qué vértice es el padre de g?
d) ¿Qué vértices son los descendientes de f?
e) ¿Cuáles son los hermanos de d?
f) ¿Cuál es el número de nivel del vértice j?

g) ¿Qué vértices tienen el nivel 3 ?
h) ¿Cuál es la altura del árbol?
i) ¿Es un árbol balanceado?
j) ¿Es m- ario, para algún m?
k) ¿Es regular?
l) ¿Es pleno?
m) Dar los subárboles con raíz en f, b y d. Caracterizarlos.

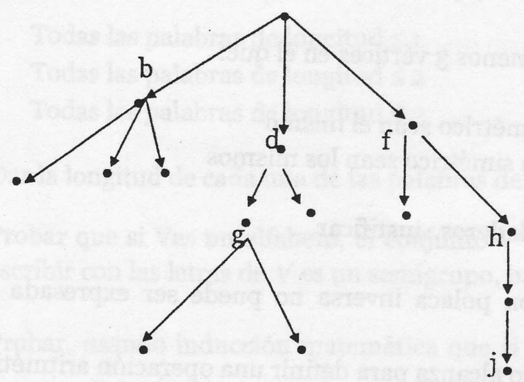
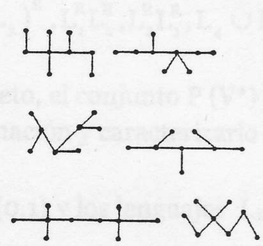


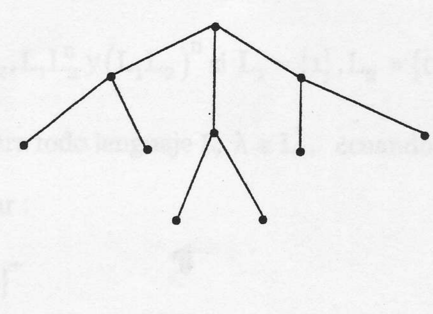
diagrama (I)

10. Para el árbol del ejercicio anterior establecer un orden para los hijos del mismo padre.

11. Indicar, al menos un par de árboles isomorfos entre los siguientes:



12. Considerar el siguiente árbol, etiquetarlo y recorrerlo, si es posible, en orden previo, orden simétrico y orden posterior



13. La siguiente expresión: x y + 3 ↑ x y – 3 ↑ - x y * / está dada en notación polaca inversa, se pide recuperar el árbol, escribirla en notación infija usual y simplificarla

14. La siguiente expresión: ((7-a) / 5) * ((a + b)↑3) está dada en notación infija usual, se pide recuperar el árbol, escribirla en notación polaca y en notación polaca inversa

15. La siguiente expresión: (a + b-c) | (d * e^3) está dada en notación infija usual , se pide recuperar el árbol, escribirla en notación polaca y polaca inversa

16. Dar un ejemplo de árbol binario, con por lo menos 3 vértices en el que:

 a) Los recorridos en orden previo y orden simétrico sean el mismo
 b) Los recorridos en orden posterior y orden simétrico sean los mismos

17. Indicar si los siguientes enunciados son verdaderos. Justificar

 a) La siguiente expresión dada en notación polaca inversa no puede ser expresada en notación infija usual: ab + cd * ef /– +a *
 b) El recorrido de un árbol en orden simétrico alcanza para definir una operación aritmética

TRABAJO PRÁCTICO Nº 8

Lenguajes, gramáticas, autómatas

Lenguajes

1. Para las palabras $w_1 = 1001$, $w_2 = 0$, $w_3 = \lambda$ de V^* siendo $V = \{0,1\}$ se pide:

w_1w_2, w_1w_3, w_3w_1, $w_1^Rw_2$, $(w_1^Rw_2)^R$, $(w_3w_1^R)^R$, $(w_1w_2w_3)^R$, $(w_1w_3^Rw_2^R)^R$

2. Considerar el alfabeto $V = \{a, b, c\}$ y dar, por enumeración:

a) Todas las palabras de longitud ≤ 1
b) Todas las palabras de longitud ≤ 2
c) Todas las palabras de longitud ≤ 3

3. Dar la longitud de cada una de las palabras del ejercicio 1

4. Probar que si Ves un alfabeto, el conjunto V^* de todas las palabras que se pueden escribir con las letras de *V* es un semigrupo, bajo la concatenación y caracterizarlo.

5. Probar, usando inducción matemática que si Ves un alfabeto, $w \in V^*, n \in N \cup \{0\}$ entonces $\text{long}(w^n) = n.\text{long}w$

6. Para $w = 3214$ de V^*, con $V = \{0,1,2,3,4\}$, se pide dar : $\text{long}(w^{10}), \text{long}(\lambda w^{10})^{14}$

7. Para los lenguajes $L_1 = \{ab, ba\}, L_2 = \{bab\}, L_3 = \{\lambda\}, L_4 = \varnothing$, de V^*, siendo $V = \{a, b\}$ se pide:
$L_1L_2, L_2L_3, L_1L_4, L_4L_3, (L_1L_2)^R, L_1^RL_2^R, L_2^RL_1^R, L_4 \cup L_2^5, L_3 \cap L_2^5, L_3^R \cup L_4$

8. Probar que si V es un alfabeto, el conjunto P (V^*) de todos los lenguajes de V^*es un semigrupo, bajo la concatenación y caracterizarlo

9. Considerar el alfabeto $V=\{0,1\}$ y los lenguajes $L_1=\{01,11,0\}$ y $L_2= \{10,1\}$, se pide:

a) Calcular $L_1 \times L_2$ y L_1L_2 e indicar, en cada caso, el cardinal
b) Dar un ejemplo donde $|L_1L_2| < |L_1||L_2|$

10. Describir $L_1^nL_2, L_1L_2^n$ y $(L_1L_2)^n$ si $L_1 = \{1\}, L_2 = \{0\}$

11. Se sabe que para todo lenguaje L, $\lambda \in L^*$, ¿cuando $\lambda \in L^+$?

12. Probar o refutar :

a) $\{\lambda\} = \{\lambda\}^* = \{\lambda\}^+$

b) Si V es un lenguaje, $V^+ = V^* - \{\lambda\}$

13. Calcular las clausuras positiva y de Kleene del lenguaje vacío

Gramáticas

1. Para la gramática $G = (V_n; V_t; P; s)$ donde $V_n = \{a, b, s\}$, $V_t = \{0,1,2\}$ y las producciones de P están dadas por: $s \to ab$, $a \to 01 \mid 0a1$, $b \to 2 \mid b2$.
Se pide dar por lo menos 4 palabras del lenguaje que genera y las derivaciones para encontrar las palabras 01222, 000111222

2. Considerar la gramática G =({ e, u, t, v, f };{ i, +, *, (,), }; P; e) donde las producciones de P están dadas por : $e \to u$, $u \to t \,/\, u + t$, $v \to f \,/\, v * f$, $f \to i \,/\, (e)$. Dar cinco palabras del lenguaje que genera.

3. Hallar una gramática que genere cada uno de los siguientes lenguajes:

a) $L_1 = \{ 02^n \text{ con } n \geq 2 \}$
b) $L_2 = \{ 0^m 1^n 2^m, n \geq 0, m \geq 1 \}$
c) $L_3 = \{ 0^n 1^{2n}, n \geq 1 \}$
d) $L_4 = \{ (01)^n 01, n \geq 0 \}$

4. Considerar la gramática $G = (\{x, y, z, t\}; \{0,1\}; P; x)$ y clasificarla de acuerdo con las reglas gramaticales que se dan en cada caso:

a) $x \to zyt$, $t \to 0 \mid 1$, $0y \to 1$, $1y \to 0$, $0z \to 1$, $1z \to 0 \mid 1$
b) $x \to zt$, $zt \to ty$, $y \to 1$, $z \to 0$
c) $x \to zy \mid yz$, $z \to 1$, $y \to 0$
d) $x \to 1y \mid 1z$, $y \to 0$, $z \to 0 \mid 1$

5. Para las expresiones regulares sobre el alfabeto $V = \{0,1\}$, que se dan a continuación: $01^*0; 0^*1^*; (01)^*; 0^* \vee 01^*; (0 \vee 1)0^*; (0^*1^*)^*$ en cada caso dar cinco palabras y el lenguaje regular asociado

6. Mostrar si las siguientes gramáticas son equivalentes:

$G_1 = (\{a, b, c\}; \{0,1\}; P; a)$
$a \to c0$; $c0 \to 1b1$; $1c \to 0b0$; $b \to \lambda \,/\, 0$; $c \to 1$

$G_2 = (\{a, b, c\}; \{0,1\}; P; a)$
$a \to 1b$; $b \to 1 \,/\, 1c \,/\, 0c$, $c \to 1$

$G_3 = (\{a, b\};\{0,1\};P; a)$
$a \rightarrow 1b1/\ 11;\ b \rightarrow 1\ /\ 0$

Autómatas

1. Dibujar el diagrama de transición y dar la definición formal para cada uno de los siguientes diagramas de transiciones:

a)

δ	0	1
a	a	b
b	b	a

a es estado inicial
a, b son estados finales

b)

δ	0	1	2
a	a	b	c
b	b	c	a
c	c	a	b

a es estado inicial
c es estado final

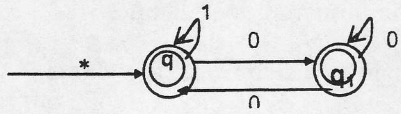
c)

δ	a	b
0	0	1
1	1	{0, 2}
2	3	1
3	3	1

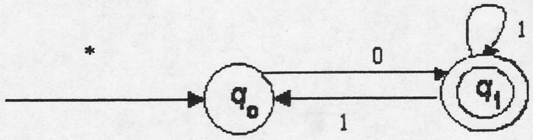
0 es estado inicial
1 es estado final

2. Dado el diagrama de transiciones dar explícitamente la función de transiciones y la definición formal

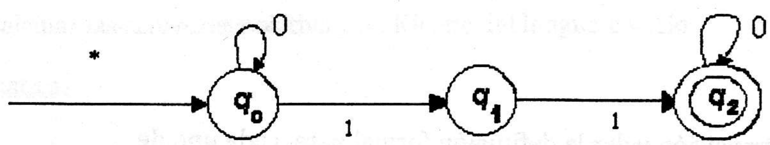
a)



b)



c)



3. Con referencia al ejercicio anterior y mediante la observación del dígrafo dar el lenguaje que reconoce cada autómata. Justificar usando las reglas.

4. Clasificar los autómatas de los ejercicios anteriores en determinísticos, no determinísticos y completos.

5. Considerar el alfabeto $V = \{0,1\}$ y diseñar un A.F. que responda cada una de las siguientes situaciones

a) Acepte un lenguaje no finito cuyas palabras tengan un número impar de ceros
b) Acepte solo las siguientes palabras 001; 100; 000; 111
c) Acepte un lenguajes no finito cuyas palabras tengan un número impar de letras

6. Diseñar un autómata finito determinístico que reconozca el lenguaje $L = (ab \vee aba)^* \vee a^*$, y dar el diagrama de transiciones.

7. Sea el autómata finito $M = (\{p,q\};\{a,b\};\delta;p;\{q\})$ donde la función δ se define por la tabla de transiciones:

δ	a	b
p	$\{p,q\}$	$\{q\}$
q	$\varnothing$	$\{p,q\}$

Se pide indicar, justificando, si las palabras a^2b, ba, b^2a pertenecen al lenguaje reconocido por el autómata

8. Diseñar un autómata finito que reconozca un lenguaje no finito, sobre $V = \{0,1\}$ cuyas palabras tengan un número par de ceros y un número impar de unos

9. Definir una gramática regular que genere el lenguaje L= {aa, bb, ab, ba} y dar el Autómata finito que lo reconoce